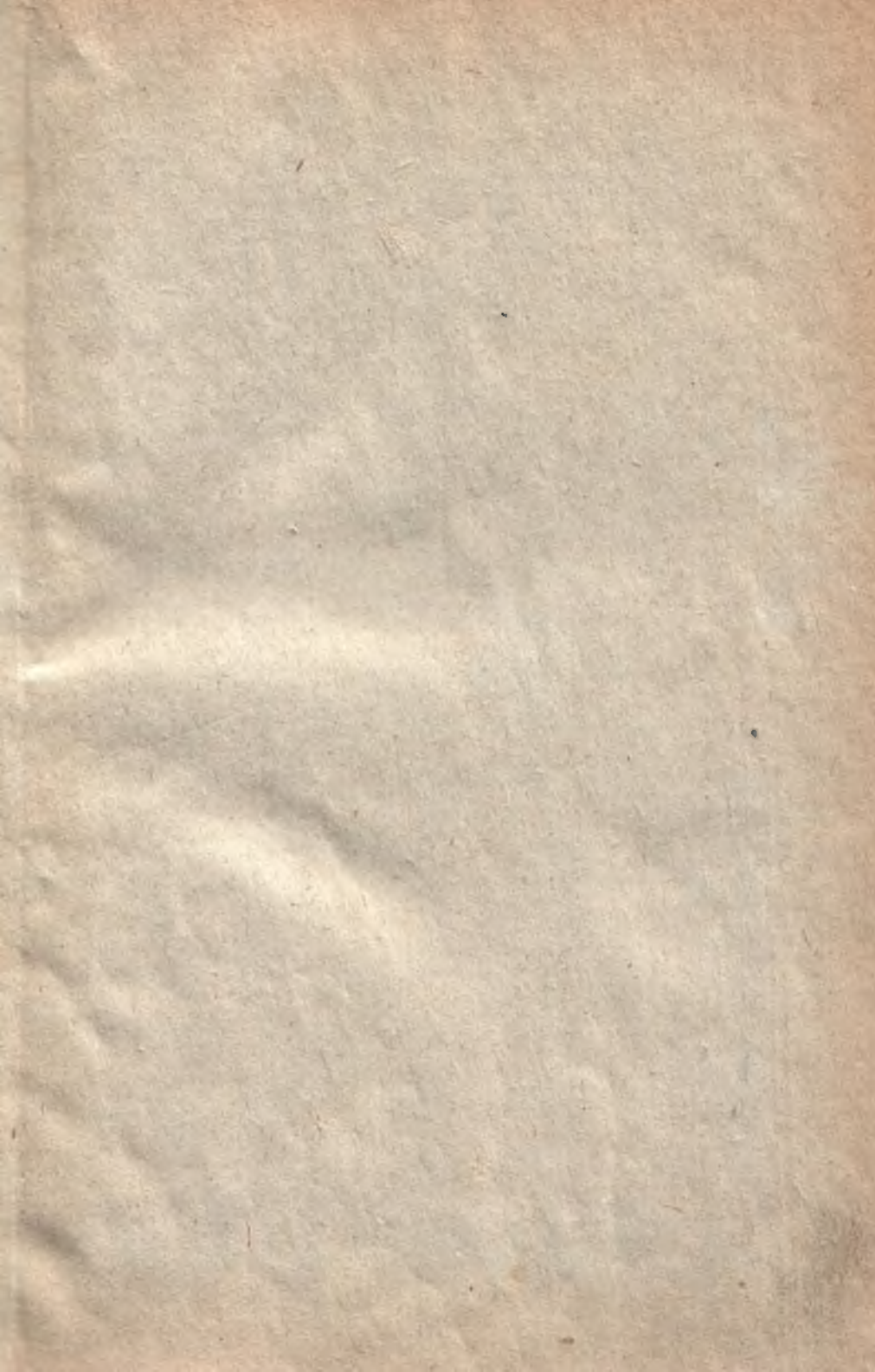
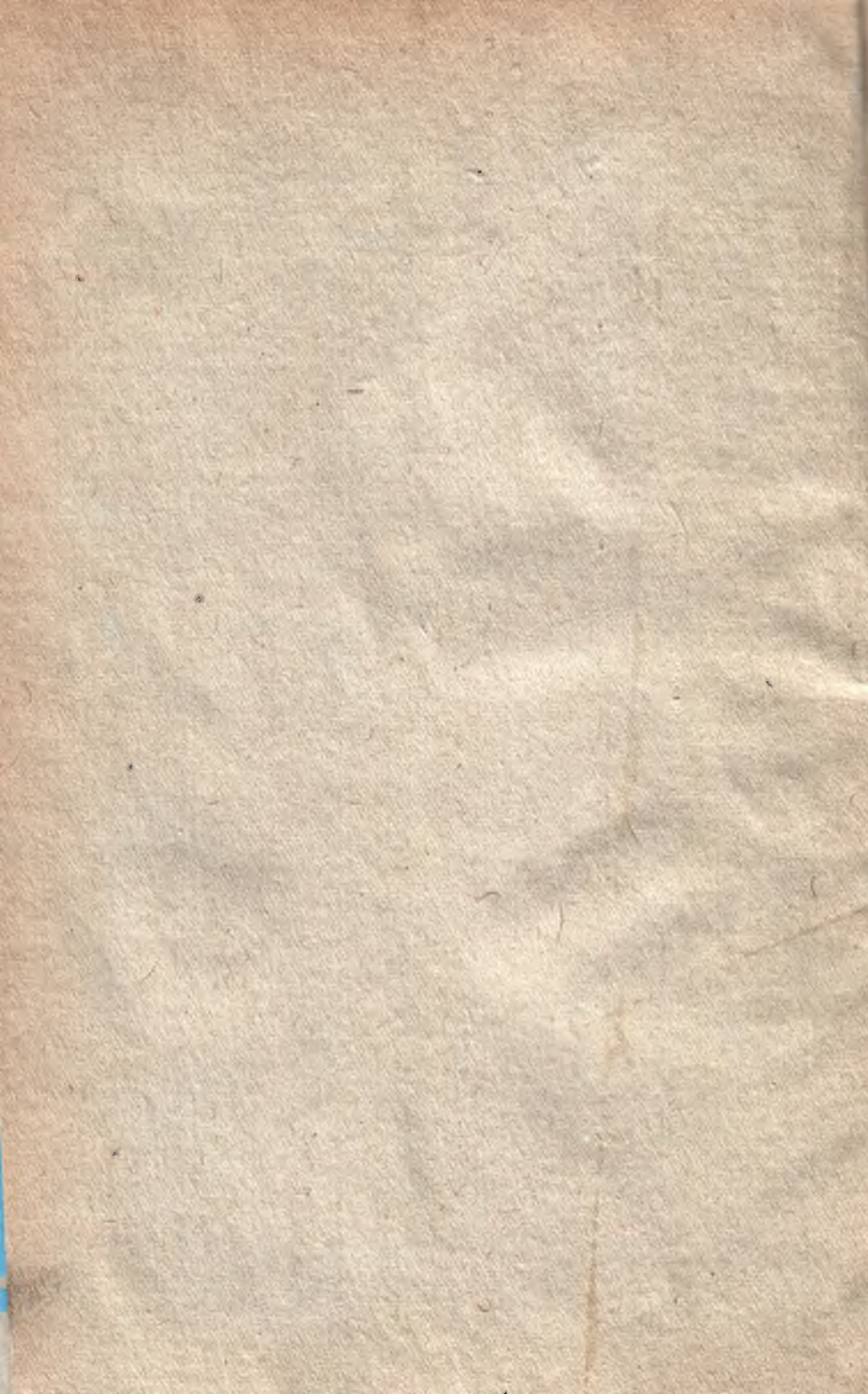


531

p-27

~~1705~~
720494





В. Я. Себель.

У 531
Г-27

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРСЪ

ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ.

Часть I.

КИНЕМАТИКА и СТАТИКА.

СЪ ПРИЛОЖЕНИЕМЪ СОБРАНИЯ ЗАДАЧЪ.

Бібліотека НУВГП



720494

531

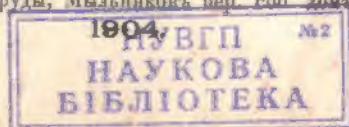
Г27

Элементарный курс теоретиче-

МОСКВА,

Типо-литография „Русскаго Товарищества печатнаго и издательскаго дѣла“.

Чистые пруды, Мыльниковъ пер. соб. дома.



W. B. R. Co.

W. B. R. Co.

W. B. R. Co.

W. B. R. Co.

W. B. R. Co.

W. B. R. Co.

W. B. R. Co.

ВВЕДЕНІЕ.

§ 1. Всѣ явленія природы, т. е. всевозможныя измѣненія въ состояніи одного какого нибудь физическаго тѣла или цѣлой группы тѣлъ, сводятся къ одному общему явленію, называемому *движеніемъ*.

Дѣйствительно, будемъ ли мы разсматривать и изучать явленія физическія, т. е. такія, при которыхъ составъ тѣлъ не измѣняется, какъ-то явленія звука, теплоты, свѣта, электричества, или явленія химическія, состоящія или въ разложеніи тѣлъ на свои составныя части, или, наоборотъ, въ образованіи новыхъ сложныхъ тѣлъ изъ нѣсколькихъ простыхъ или элементарныхъ тѣлъ, вездѣ, и въ малѣйшихъ частицахъ вещества, и въ неотбитахъ по своей величинѣ небесныхъ тѣлахъ, мы встрѣтимся съ однимъ и тѣмъ же явленіемъ движенія.

Намъ неизвѣстно ни одного тѣла въ природѣ, которое не находилось бы въ движеніи. Предметы, которые мы видимъ на землѣ и которые намъ кажутся неподвижными, въ дѣйствительности движутся съ громадной быстротой, участвуя вѣстѣ съ землею въ ея движеніяхъ вокругъ своей оси и вокругъ солнца. Солнце, планеты и звѣзды также имѣютъ свои движенія. Однимъ словомъ, всѣ тѣла природы и всѣ мельчайшія частицы этихъ тѣлъ находятся въ постоянномъ движеніи. Если мы не видимъ нѣкоторыхъ движеній, то это происходитъ или оттого, что мы сами участвуемъ въ этихъ движеніяхъ (такъ напр., мы непосредственно не замѣчаемъ движенія земли), или отъ несовершенства нашихъ чувствъ: такъ, мы не можемъ уловить ни очень быстрыхъ движеній, напр., движенія спицы колеса, вращающагося съ очень большою скоростью, ни очень медленныхъ, напр., роста деревьевъ.

Итакъ, совершенно неподвижныхъ тѣлъ въ природѣ не существуетъ. Однако мы можемъ легко представлять ихъ въ своемъ воображеніи. Мы говоримъ, что такіа тѣла находятся *въ покое*.

Вообще *движеніемъ* называется измѣненіе тѣломъ своего положенія въ пространствѣ, а *покоемъ* — сохраненіе тѣломъ одного и того же положенія.

Въ общезитіи мы говоримъ о движеніи и покоѣ тѣлъ, принимая во вниманіе ихъ положеніе *относительно* другихъ предметовъ, считаемихъ (конечно, условно) неподвижными. Такъ напр., мы обыкновенно представляемъ землю неподвижнымъ тѣломъ, когда говоримъ о движеніи или покоѣ находящихся на ней тѣлъ.

Всякое перемѣщеніе тѣла происходитъ въ теченіе нѣкотораго (хотя иногда и очень малаго промежутка времени). Поэтому говорятъ, что движеніе происходитъ *въ пространствѣ и во времени*. Отсюда понятно, что характеръ движенія опредѣляется главнымъ образомъ зависимостью, существующею между пространствомъ, *и* ходимымъ тѣломъ, и временемъ, въ которое происходитъ это перемѣщеніе. Такимъ образомъ мы различаемъ движенія быстрыя и медленныя.

§ 2. Всякая причина движенія или измѣненія движенія называется *силой*. Силы происходятъ отъ взаимнаго дѣйствія однихъ тѣлъ на другія (напр. силы удара, притяженія и проч.) или отъ взаимнаго дѣйствія однихъ частицъ одного и того же тѣла на другія (напр., силы сѣвленія, упругости и проч.). Онѣ могутъ быть крайне разнообразны, однако вполне возможно, не занимаясь изслѣдованіемъ природы силъ, изучать ихъ только по тѣмъ движеніямъ или измѣненіямъ движенія, которыя онѣ производятъ. Поэтому возможно считать совершенно *одинаковыми* тѣ силы, *которыя при одинаковыхъ условіяхъ сообщаютъ одному и тому же тѣлу одинаковыя движенія*, хотя бы природа этихъ силъ была бы и различна.

Изъ самаго опредѣленія понятія силы слѣдуетъ, что, если на какое нибудь свободное тѣло *) начнетъ дѣйствовать одна какая либо сила, то она или приведетъ это тѣло въ нѣкоторое движеніе, если оно было въ покоѣ, или будетъ измѣнять его движеніе, если оно уже ранѣе двигалось.

*) *Свободнымъ* называется такое тѣло, которое можетъ одинаково безпрятственно двигаться по любому направленію.

Но если на это тѣло дѣйствуютъ двѣ или нѣсколько силъ, то можетъ случиться, что вслѣдствіе ихъ совокупнаго дѣйствія тѣло не измѣнитъ своего первоначальнаго состоянія, которое оно имѣло ранѣе, т. е. оно или будетъ оставаться въ покой, или продолжать безъ всякаго измѣненія свое движеніе. Такое замѣчательное состояніе тѣла называется его *равновѣсіемъ*, а силы, дѣйствующія на него, — *взаимно уравновѣшивающимися*.

§ 3. **Механика** *) есть наука о движеніи и равновѣсіи тѣлъ. Она раздѣляется на общую или теоретическую механику и на прикладную механику.

Теоретическая механика изучаетъ общіе законы движенія и равновѣсія тѣлъ. Прикладная механика занимается изслѣдованіемъ приложенія этихъ законовъ къ машинамъ, постройкамъ и вообще къ различнымъ вопросамъ техники.

Такъ какъ всѣ явленія природы, какъ уже было сказано, сводятся къ явленію движенія, то, слѣдовательно, *общая механика представляетъ собой основную науку о природѣ*.

§ 4. Теоретическая механика рассматриваетъ: 1^о, различныя движенія и ихъ свойства; 2^о, причины движенія или силы и ихъ свойства и 3^о, зависимость между силами и движеніями.

Отсюда вытекаетъ естественное раздѣленіе этой науки на три отдѣла: *кинематику, статику и динамику*.

Кинематика **) изучаетъ различныя виды движеній и ихъ свойства, оставляя безъ разсмотрѣнія причины этихъ движеній, т. е. силы. Такимъ образомъ, кинематика есть чисто отвлеченная математическая наука, отличающаяся отъ геометріи только тѣмъ, что кромѣ пространства, проходимаго движущимся тѣломъ, она рассматриваетъ еще и время, въ которое совершается это движеніе. Поэтому ее иногда называютъ *геометріей четырехъ измѣреній*.

Статика ***) занимается изученіемъ общихъ свойствъ силъ, а также того случая дѣйствія ихъ на тѣло, когда оно остается въ равновѣсіи.

*) Отъ греческаго слова *μηχανή* — машина.

**) Отъ греческаго слова *κίνημα* — движеніе. Иногда эту часть механики называютъ также *форонومیей*, т. е. наукой о движеніи.

***) Отъ греческаго слова *στάσις* — покой, неподвижное состояніе.

Динамика *) изслѣдуетъ свойства и законы движенія въ зависимости отъ силъ, производящихъ его. Она занимается рѣшеніемъ двухъ основныхъ вопросовъ:

1. По данному тѣлу и дѣйствующимъ на него силамъ опредѣлить всѣ обстоятельства движенія тѣла.

2. По данному тѣлу и движенію его опредѣлить, какія силы могли произвести это движеніе.

Основаніемъ статика и динамики **) служатъ нѣсколько положеній, называемыхъ основными законами механики. Они были открыты великими творцами современной механики Галилео Галилеемъ (1564—1642) и Исаакомъ Ньютономъ (1642—1727) путемъ наблюденія и размысленія надъ явленіями природы.

Поэтому статика и динамика принадлежатъ къ физическимъ наукамъ.

§ 5. Какъ извѣстно, тѣла природы раздѣляются на твердые, жидкія и газообразныя. Въ этомъ курсѣ будутъ изложены главнымъ образомъ основанія механики твердаго тѣла, причемъ мы будемъ считать такое тѣло *абсолютно-твердымъ*, т. е. такимъ тѣломъ, связь между частицами котораго, а слѣдовательно и ихъ взаимныя разстоянія, не могутъ быть измѣнены никакими силами. Для обобщенія нашихъ разсужденій и выводовъ мы будемъ предполагать, что абсолютно-твердое тѣло имѣетъ только три общихъ свойства, одинаково присущихъ всемъ тѣламъ природы, а именно *протяженность, непроницаемость и подвижность*. Что же касается до *вѣса* тѣла, то его будемъ разсматривать, гдѣ это будетъ нужно, не какъ общее свойство, а какъ нѣкоторую опредѣленную силу (тяжести), дѣйствующую на тѣло. Въ остальныхъ случаяхъ мы будемъ представлять себѣ тѣло, не имѣющимъ вѣса.

Въ механикѣ тѣло называютъ *свободнымъ*, если оно можетъ совершенно безпрепятственно перемѣщаться по какому угодно направленію, и *несвободнымъ*, если оно можетъ перемѣщаться не по всѣмъ, а только по нѣкоторымъ направленіямъ.

Если тѣло имѣетъ *одну неподвижную точку*, то остальные точки его могутъ перемѣщаться по шаровымъ поверхностямъ,

*) Отъ греч. слова *δυναμις*—сила.

**) Иногда статику и динамику называютъ общимъ именемъ *кинетики* (отъ греч. слова *κίνησις*—движеніе).

расположимъ изъ неподвижной точки, какъ изъ центра, радиусами, одинаковыми равнымъ разстоянiямъ этихъ точекъ до неподвижной точки. Если тѣло имѣеть *одну неподвижную точку*, то и всѣ точки, лежащiя на прямой, соединяющей двѣ первыя точки, будутъ также неподвижны, т. е. тѣло имѣеть *неподвижную ось*. Если нѣсколько точекъ могутъ описывать около этой оси, на какомъ-ли *своемъ радиусѣ*, окружности въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой оси.

Наконецъ, если тѣло имѣеть *три или болѣе неподвижныхъ точекъ*, не лежащихъ на одной прямой, то оно будетъ *неподвижнымъ*.

§ 6. Имѣть болѣе понятiе о движенiи тѣла значить знать движенiе каждой его точки, что представляетъ, вообще говоря, очень сложную задачу. Чтобы упростить изученiе движенiя, мы начинаемъ съ описанiя движенiя изображаемаго материальнаго тѣла о с о с о с т а в л я е м о г о т ѣ л о м , которое назовемъ *материальной точкой*. Изучимъ движенiе материальной точки имѣть, какъ то мы уже знаемъ, что въ многихъ вопросахъ, напрѣ, въ астрономiи, тѣла рассматриваются какъ материальныя точки.

Ассидируя твердое тѣло часто называемъ *непроницаемой системой материальныхъ точекъ*.

§ 7. Инакъ, теоретическая механика, подобно тому какъ и геометрiя, рассматриваетъ явленiя движенiя и равновѣсiя не действительно существующихъ физическихъ тѣлъ, а нѣкоторыхъ воображаемыхъ тѣлъ, называемыхъ жатъ разными тѣлами и точками. Это обстоятельство, кромѣ громаднаго упрощенiя, вноситъ еще и полную общность къ выводимымъ такимъ образомъ законамъ движенiя и равновѣсiя. Эти общiе законы будутъ одинаково *необходимы и справедливы* для *всѣхъ тѣлъ*, чѣмъ и объясняется ихъ первостепенное значенiе. Правда, они *не всегда* бываютъ *достаточно*, но эту недостаточность можно пополнить, принявъ во вниманiе особыя свойства, которыя представляютъ рассматриваемыя физическiя тѣла и условiя дѣйствiя на нихъ силъ.

Кинематика.

Основные понятія.

§ 8. Движеніе точки при перемещеніи ея изъ одного положенія въ пространство въ другое можетъ проходить самымъ различнымъ образомъ. Поэтому, чтобы внести порядокъ въ изученіе этого явленія, надо прежде всего установить, чѣмъ могутъ различаться другъ отъ друга движенія точки.

Движенія точки различаются, во-первыхъ, по виду той линии которую она описываетъ въ пространствѣ, а во-вторыхъ, по той или другой зависимости между пространствомъ, проходимымъ точкой, и временемъ, въ которое совершается этотъ путь.

§ 9. Прямая или кривая линии, описываемая движущейся точкой, называется ея **траекторіей** *).

По виду траекторій, движенія дѣлятся на *прямолинейныя* (напр., таковы движенія точекъ свободно падающаго тѣла) и *криволинейныя*. Криволинейныя движенія могутъ быть самаго различнаго рода: *круговыя* (движеніе въ одной плоскости вокругъ неподвижнаго центра точекъ тѣла, подвѣшеннаго на нити), *эллиптическія* (движеніе земли и другихъ планетъ около солнца), *параболическія* (истеченіе частицъ жидкости изъ отверстія въ боковой стѣнкѣ сосуда) и т. д.

§ 10. По зависимости между проходимымъ пространствомъ и временемъ, движенія раздѣляются на *равномерныя* и *неравномерныя*.

За основную единицу времени принимаются сутки 24 часа — 24.60 минутъ — 24.60² секундъ, т. е. время, въ ко-

*) Отъ латинскаго глагола *transire* -бросать. Траекторіи, описываемыя небесными тѣлами, называются орбитами (отъ латинск. слова *orbis* — кругъ).

тремя совершаетъ одинъ полный оборотъ вокругъ своей Нибольше употребительная въ механикѣ единица времени есть секунда (1"). Некоторая величина или продолжительность времени называется *промежуткомъ времени*. Весьма малый промежутокъ времени называется *элементомъ времени*. Граница, отдѣляющая одинъ промежутокъ времени отъ другого, называется *моментомъ времени* *).

Пространство, проходимое движущейся точкой, измѣряется единицами длины. Въ механикѣ наиболѣе употребительно метрическия мѣры, въ особенности метръ $\equiv 1,4$ арш. $\equiv 3,28$ футовъ и сантиметръ $\equiv 0,01$ метра $\equiv 0,4$ дюйма.

III. Какъ уже было ранее сказано, во многихъ вопросахъ послѣднее тѣло разсматриваютъ, какъ движеніе одной точки. Это особенно часто бывается въ тѣхъ случаяхъ, когда длина траекторій весьма ничтожна по сравнению съ размерами тѣла.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда мы имеемъ тѣло, движущееся точно такъ же, какъ одна изъ точекъ. Но когда изучаютъ движеніе тѣла, какъ ~~они не могутъ считать~~ *материальныхъ точекъ*, то приходится различать еще два главныхъ рода движенія тѣла, а именно *поступательное* и *вращательное*.

Поступательнымъ движеніемъ тѣла называется такое движеніе, когда всѣ точки его описываютъ въ одно и то же время равныя и параллельныя траекторіи. Эти траекторіи могутъ быть какъ прямолинейными, такъ и криволинейными. Всякое прямолинейное движеніе тѣла, не сопровождаемое его вращеніемъ, представляетъ поступательное движеніе. Таковы, напр., движенія поршня въ цилиндрѣ паровой машины, тѣла, падающаго по вертикали тяжелымъ концомъ внизъ и проч. Гораздо рѣже встрѣчаются криволинейныя поступательныя движенія.

Если вообразить, что какое нибудь тѣло, напр., пирамида, поставленная вершиной на плоскость, движется не дѣлая *поворота* около своей *высоты* такъ, что вершина ея описываетъ какую нибудь кривую линію на этой плоскости, то и всѣ другія

* Очевидно, что моментъ времени имѣетъ такое же значеніе относительно промежутка времени, какое въ геометріи точка имѣетъ относительно линіи. Подобно тому какъ длина прямой измѣряется расстояніемъ между ея начальной и конечной точкой, и величина промежутка времени измѣряется расстояніемъ между начальнымъ и конечнымъ моментомъ этого промежутка.

точки этой пирамиды будутъ описывать въ пространствѣ точно такія же кривыя, при томъ параллельныя первой кривой. Следовательно наше тѣло имѣетъ *криволинейное и поступательное движеніе*. Въ поступательномъ движеніи всякая прямая, соединяющая двѣ какія либо точки тѣла, перемѣщается параллельно самой себѣ.

Очевидно, что всѣ обстоятельства поступательнаго движенія для каждой точки въ отдельности или для всѣхъ или вмѣстѣ, т. е. для всего тѣла, *всѣми совершенно одинаковы*, а потому при изученіи этого движенія можно говорить безразлично о движеніи одной точки тѣла или о движеніи всего тѣла. Всѣ выводы, къ которымъ мы при этомъ придемъ, будутъ справедливы, какъ для одной точки, такъ и для всего тѣла.

Вращательнымъ движеніемъ тѣла называется такое движеніе, когда точки его описываютъ параллельныя, но не равныя окружности или дуги вокругъ неподвижной оси въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ этой оси.

Тѣло можетъ одновременно имѣть и оба движенія: поступательное и вращательное. Тогда движеніе его называется *сложнымъ* или *составнымъ*. (Здѣсь относятся, напр., движеніе колесъ экипажа, движеніе гайки по винту и т. д.)

Изученіе движенія мы начнемъ съ прямолинейныхъ движеній точки (или тѣла, принимаемаго за точку).

Прямолинейныя движенія.

Равномѣрное движеніе.

§ 12 Если точка въ равн. и промежутки времени (каждый изъ которыхъ эти промежутки ни были) проходить равныя пространства, то такое движеніе называется равномернымъ.

Напр. если точка изъ пункта А проходитъ по 10 метрамъ въ каждыя секунды по 5 метровъ, въ каждыя полсекунды по 2 1/2 метрамъ и т. д., то такое движеніе есть равномерное.

Такое движеніе характеризуется своею скоростью, т. е. темъ или другомъ быстротой или медленностью перемѣщенія. Въ равномерномъ движеніи скорость не измѣняется пространствомъ, проходящимъ въ единицу времени (чаще всего въ секунду). Такимъ образомъ въ каждомъ равномерномъ движеніи скорость есть величина постоянная. Напр., въ только что приведенномъ примѣрѣ скорость точки равна 5 метрамъ въ 1 секунду.

§ 13 Условимся обозначать время движенія (напр., въ секундахъ) черезъ t , скорость (въ единицахъ длины) черезъ v , пройденное пространство черезъ s .

Такъ какъ въ каждую секунду тѣло проходитъ v единицъ длины, то, очевидно, что въ t секундъ оно пройдетъ vt единицъ длины. Итакъ

$$s = vt \quad (1).$$

Это уравненіе называется уравненіемъ равномернаго движенія и читается обыкновенно такъ: въ равномерномъ движеніи пространство равно скорости, умноженной на время.

Изъ уравненія (1) имѣемъ, что

$$t = \frac{s}{v} \quad (2) \quad \text{и} \quad v = \frac{s}{t} \quad (3)$$

Уравненіе (3) показывасть, что *въ равномѣрномъ движеніи скорость равна отношенію пройденнаго пространства ко времени.*

Итакъ, помощью уравненія (1) мы всегда можемъ найти одну изъ трехъ величинъ s , t и v , если двѣ другія известны.

Примѣръ 1. Какое пространство пройдетъ равномѣрно движущаяся точка въ 1,5 минуты, если скорость ея 5 метровъ въ 1 секунду?

Отвѣтъ. $s = 5 \cdot 1,5 \cdot 60 = 450$ метровъ.

2. Опредѣлить скорость паровоза, если онъ, двигаясь равномѣрно, въ 35 секундъ, прошелъ 630 метровъ.

Отвѣтъ. $v = \frac{630}{35} = 18$ метровъ въ секунду.

Легко замѣтить, что пространства s и s' , проходимыя равномѣрно движущейся точкой (или тѣломъ) въ различные промежутки времени t и t' пропорциональны временамъ.

Дѣйствительно, изъ уравненій $s = vt$ и $s' = vt'$, получаемъ $s:s' = vt:vt'$ или $s:s' = t:t'$.

Перемѣнные движенія.

§ 14. Если точка въ разные промежутки времени проходитъ неравные пространства, то такое движеніе называется *перемѣннымъ* или *нереглярнымъ*.

Различныхъ перемѣнныхъ движеній существуетъ безчисленное множество. Нѣкоторыя изъ нихъ отличаются известнаго рода правильностью (напр., движеніе брошенных или падающихъ тѣлъ, качаніе маятника и проч.), другія могутъ быть совершенно произвольны (напр., движенія живыхъ существъ).

Если точка въ каждый слѣдующій промежутокъ времени проходить больший путь, чѣмъ въ равномъ ему предыдущій промежутокъ, то такое движеніе называется *ускореннымъ*, а если меньшій путь, то *замедленнымъ*.

§ 15. Очевидно, что въ перемѣнномъ движеніи уже нельзя называть скоростью точки или тѣла пространство, проходимое ими въ единицу времени, такъ какъ пространство это постоянно из-

мѣняется. Иначе говоря, скорости въ переменномъ движеніи есть величина переменная, а потому, чтобы составить понятіе о какомъ либо переменномъ движеніи, необходимо еще знать, какъ *измѣняется его скорость.* § 16.

Измѣненіе скорости въ единицу времени называется ускореніемъ. Въ ускоренномъ движеніи скорость точки или тѣла увеличивается и, слѣдовательно, ускореніе есть положительная величина; наоборотъ, ускореніе въ замедленномъ движеніи есть отрицательная величина, такъ какъ скорость здѣсь уменьшается. Въ прямолинейномъ равномерномъ движеніи ускореніе, очевидно, равно нулю, т. е. ускоренія не существуетъ, такъ какъ скорость равномернаго прямолинейнаго движенія есть величина постоянная или неизмѣняющаяся.

§ 16. Чтобы говорить о скорости переменнаго движенія въ то или другое время, мы должны знать, какъ *измѣняется скорость въ единицу времени.* И такъ мы имѣемъ, для скорости переменнаго движенія, величину, которая измѣняется въ единицу времени напр., въ началѣ движенія, въ 1-й или вообще t -ой секунды и т. п.), величину, которую мы назовемъ скоростью въ данную секунду или въ данную минуту. Скорость въ данную секунду или въ данную минуту переменнаго движенія въ той или другой моментъ его пути, что, впрочемъ, одно и то же, такъ какъ каждому моменту времени соответствуетъ одна опредѣленная точка пути и наоборотъ.

Скоростью переменнаго движенія въ данный моментъ времени называютъ то пространство, которое прошло бы тѣло въ единицу времени (секунду или минуту) за этотъ моментъ, если бы съ того момента оно начало двигаться равномерно.

Примѣръ. Скорость переменнаго движущагося тѣла въ концѣ 4-ой секунды есть пространство, которое прошло бы тѣло въ теченіе 5-ой секунды, если бы въ моментъ, отдѣляющій конецъ 4-ой секунды отъ начала 5-ой секунды, оно стало двигаться равномерно.

§ 17. Въ общежитіи однако мы часто говоримъ о скорости переменныхъ движеній вообще, напр., о скорости пѣшехода, лошади, желѣзнодорожнаго поѣзда и т. д. Въ этихъ случаяхъ подъ скоростью даннаго переменнаго движенія мы подразумѣваемъ *среднюю скорость его, т. е. скорость такого равномернаго движенія, двигаясь съ которою тѣло въ то же промежутокъ вре-*

и ни про что бы точно такое же пространство, какъ и въ извѣстномъ перемѣнномъ движеніи.

Такимъ образомъ, если, напр., извѣстно, что какой нибудь пѣшеходъ прошелъ 300 сажень въ 10 минутъ, то мы говоримъ, что скорость его за это время была 30 саж. въ 1 минуту или $\frac{1}{2}$ сажени въ 1 секунду. Но, говоря это, мы не можемъ, конечно, утверждать, что пѣшеходъ действительно проходилъ $\frac{1}{2}$ сажени въ каждую секунду, такъ какъ понятно, что онъ то ускорялъ, то замедлялъ свои шаги, и поэтому движеніе его было не равномерное а перемѣнное. Следовательно, это перемѣнное движеніе мы мысленно приравниваемъ къ такому равномерному движенію, въ которомъ пѣшеходъ также въ 10 минутъ прошелъ бы 300 сажень. Скорость, равная $\frac{1}{2}$ сажени въ 1 секунду, есть скорость этого воображаемаго равномернаго движенія или, что все равно, средняя скорость даннаго перемѣннаго движенія въ промежутокъ 10 минутъ.

Примѣры среднихъ скоростей въ секунду.

	м в с
Пѣшехода	1,5
Лошади шагомъ	1
„ рысью	2,1
„ галопомъ	4,5
Скаковой лошади	15
Товарнаго поѣзда	8—12
Пассажирскаго „	12—16
Скораго „	16—25
Парохода	4—8
Ружейной пули	480
Звука въ воздухѣ (при 0°С)	332
Свѣта	300 тыс. километр.

§ 18 Если извѣстно пространство s , пройденное перемѣнно движущимся тѣломъ въ t секундъ, то для опредѣленія средней скорости движенія за этотъ промежутокъ времени, достаточно раздѣлить величину пройденнаго пространства на число секундъ

ого промежутка времени. Поэтому, называя среднюю скорость черепашки v , получимъ, что

$$v = \frac{s}{t}.$$

Но обратимъ, если бы мы знали среднюю скорость v перемѣннаго движенія за некоторый промежутокъ времени t , то определили бы пространство, пройденное при этомъ тѣломъ по уравненію $s = vt$, т. е. точно такъ же, какъ и въ равномерномъ движеніи.

Следовательно, что средняя скорость перемѣннаго движенія тѣла въ промежутокъ времени t есть средняя арифметическая величина скоростей, имѣвшихъ мѣсто въ теченіе этого промежутка.

19. Если бы мы знали, каковы были скорости, имѣвшія мѣсто въ теченіе времени t , то, такъ же, какъ въ равномерномъ движеніи, мы могли бы найти пространство, пройденное тѣломъ, умноживъ среднюю скорость на время. Но среднюю скорость въ перемѣнномъ движеніи мы не знаемъ. Поэтому, если бы мы знали скорости, имѣвшія мѣсто въ теченіе времени t , то мы могли бы найти среднюю скорость, сложивъ всѣ скорости и раздѣливъ сумму на количество скоростей. Эта величина можетъ быть положительной или отрицательной.

Въ первомъ случаѣ мы называемъ *равномерно ускоренное* движеніе, въ второмъ — *равномерно замедленное*.

Равномерно-ускоренное движеніе.

§ 20. **Равномерно ускоренное движеніе** — это такое движеніе, въ которомъ скорость въ каждую следующую единицу времени увеличивается на одну и ту же величину. Такимъ образомъ, ускореніе въ этомъ движеніи есть постоянная положительная величина.

Примѣръ. Всякое тѣло, свободно падающее въ безвоздушномъ пространствѣ, движется равномерно-ускоренно такъ какъ въ каждую следующую секунду скорость его увеличивается на 9,8 метра или на 32,2 фута.

Примѣчаніе. Увеличеніе скорости свободно падающихъ тѣлъ называется *ускореніемъ тяжести* или *ускореніемъ земного притяженія* и обозначается буквой g . Строго говоря, по причинамъ,

которыя въ послѣдствіи будутъ изложены, величина g неодинакова для всѣхъ точекъ земной поверхности. Такъ, на экваторѣ она $\approx 9,78$ м., на широтѣ 45° она $\approx 9,8$ м. а на полюсѣ 9,83 м. Впрочемъ эти небольшие различія не имѣютъ существеннаго значенія для большинства практическихъ вычисл. Для упрощенія вычисленій въ русскихъ ядрахъ часто принимаютъ $g \approx 32$ футамъ.

§ 21 Уравненіе скорости. Положимъ, что мы наблюдаемъ въ теченіе t секундъ движеніе какого нибудь тѣла, двигающагося равномерно-ускоренно, съ ускореніемъ a . Пусть въ начальный моментъ наблюденія, т. е. въ началѣ первой секунды, тѣло уже имѣло какую-то скорость v_0 , которую мы будемъ называть *начальной скоростью*. Тогда

Въ началѣ	1-ой	секунды	скорость тѣла	v_0
Въ концѣ	1-ой	"	"	$v_0 + a$
"	2-ой	"	"	$v_0 + 2a$
"	3-ей	"	"	$v_0 + 3a$
"	4-ой	"	"	$v_0 + 4a$

Итакъ, называя скоростью въ концѣ t -ой секунды *среднюю* (или *среднюю*) скорость, получимъ слѣдующую зависимость между временемъ и скоростью въ концѣ того времени

$$v = v_0 + at \quad (1)$$

Эта зависимость называется *уравненіемъ скорости* въ равно-мѣрно-ускоренномъ движеніи.

§ 22 Уравненіе пространства. Чтобы найти пространство, пройденное тѣломъ въ промежутокъ времени t , надо опредѣлять, какъ это уже было ранѣе объяснено, среднюю скорость движенія за этотъ промежутокъ времени и затѣмъ умножить ее на величину промежутка (т. е. на число секундъ t). Самая трудная часть задачи заключается въ опредѣленіи средней скорости. Въ равно-мѣрно-ускоренномъ движеніи средняя скорость находится очень просто: такъ какъ скорости въ каждую секунду увеличиваются на одну и ту же величину, то послѣдовательный рядъ ихъ представляетъ *арифметическую прогрессию*: $v_0, v_0 + a, v_0 + 2a, v_0 + 3a, \dots$

(Напр., тѣло, брошенное вертикально внизъ въ безвоздушномъ пространствѣ съ начальной скоростью въ 0,2 метра, будетъ имѣть скорости въ концѣ 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой секунды: 10 м.; 19,8 м.; 29,6 м.; 39,4 м. и т. д.).

Но извѣстно, что средняя арифметическая изъ чиселъ, составляющихъ арифметическую прогрессию, равна средней арифметической изъ перваго и послѣдняго числа. Поэтому для нахождения средней скорости v , равно-ускореннаго движенія достаточно сложить начальную (v_0) и конечную (v) скорости и сумму ихъ разделить пополамъ, т. е. $v = \frac{v_0 + v}{2}$.

(Напр., средняя скорость въ нашемъ примѣрѣ $v = \frac{0,2 + 39,4}{2} = 19,8$ м.).

Если извѣстны скорости въ нашемъ примѣрѣ, v_0 , а конечная v , то средняя скорость равно-ускореннаго движенія

$$v = \frac{v_0 + v_0 + at}{2} = \frac{2v_0 + at}{2} = v_0 + \frac{at}{2}.$$

Если же въ параллельномъ движеніи, найдемъ пройденное тѣломъ среднѣшное $s = \left(v_0 + \frac{at}{2} \right) t$ или

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Если величина v конечной скорости была дана, то

$$s = \frac{(v_0 + v) t}{2} \dots \dots \dots (3)$$

Опредѣливъ изъ уравненія $v = v_0 + at$ величину $t = \frac{v - v_0}{a}$ и подставляя ее въ уравненіе (3), найдемъ еще выраженіе величины пройденнаго пути: $s = \frac{(v_0 + v)(v - v_0)}{2a}$ или

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \dots \dots \dots (4)$$

Уравненія (2), (3) и (4) называются *уравненіями пространства* въ равно-ускоренномъ движеніи

§ 23. Если тѣло начало двигаться *безъ начальной скорости*, т. е., если $v_0 = 0$, то изъ уравненій, (1), (2), (3), (4), получимъ для этого частнаго случая:

Уравненіе скорости: $v = at$ (1')

Уравненія пространства:

$$s = \frac{at^2}{2} \quad (2'), \text{ или } s = \frac{v^2}{2a} \quad (3') \text{ или } s = \frac{v^2}{2a} \quad (4').$$

Очевидно, что уравненія (1'), (2'), (3') и (4') можно получить непосредственно, принявъ начальную скорость $v_0 = 0$ и повторить всѣ предыдущія разсужденія.

Равномѣрно-замедленное движеніе.

§ 24. Равномѣрно-замедленное движеніе *есть такое, въ которомъ скорость въ каждой секунду уменьшается на одну и ту же величину*. Поэтому ускореніе этого движенія есть постоянная отрицательная величина (иногда ее называютъ *минусъ*). Мы будемъ ее обозначать черезъ a .

Примѣръ. Возкое тѣло, брошенное вертикально вверхъ въ безвоздушномъ пространствѣ, движется равномѣрно замедленно: въ каждую секунду скорость его уменьшается на величину $a = 9,8$ метра. Если, напр., скорость его въ началѣ 1-й секунды была 60 метровъ, то скорость его въ концѣ 1-й, 2-й, 3-й, 4-й секунды будетъ: 50,2 м., 40,4 м.; 30,6 м.; 20,8 м. и т. д.

§ 25. **Уравненія скорости и пространства.** Уравненія скорости и пространства въ равномѣрно-замедленномъ движеніи выводятся совершенно такъ же, какъ въ равномѣрно-ускоренномъ движеніи. Называя начальную скорость тѣла черезъ v_0 , получимъ, что скорость его:

Въ началѣ	1-ой секунды	=	v_0
Въ концѣ	1-ой	"	$v_0 - a$
"	2-ой	"	$v_0 - 2a$
"	3-ей	"	$v_0 - 3a$
"	4-ой	"	$v_0 - 4a$

Итак, уравненіе скорости въ равномерно замедленномъ движеніи есть:

$$v = v_0 - at \dots \dots \dots (1)$$

Такъ какъ рядъ послѣдовательныхъ скоростей въ равномерно-замедленномъ движеніи также представляетъ арифметическую прогрессию, то средняя скорость этого движенія за нѣкоторый промежутокъ времени равна полусуммѣ начальной и конечной скорости за этотъ же промежутокъ времени, т. е.

$$\frac{v_0 + v}{2} = \frac{v_0 + v_0 - at}{2} = \frac{2v_0 - at}{2} = v_0 - \frac{at}{2}.$$

Отсюда пройденное пространство $s = \left(v_0 - \frac{at}{2} \right) t$ или

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} \dots \dots \dots (2)$$

Формулы (1) и (2) можно получить изъ соответствующихъ формулъ равноускореннаго движенія, если вмѣсто $+a$ подставить $-a$.

Если величина v конечной скорости известна, то

$$\frac{(v_0 + v)t}{2} \dots \dots \dots (3)$$

Наконецъ, опредѣливъ изъ уравненія (1) величину $t = \frac{v_0 - v}{a}$

и подставивъ ее въ ур-е (3), получимъ $s = \frac{(v_0 + v)(v_0 - v)}{2a}$

$$\text{или } s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a} \dots \dots \dots (4)$$

Примѣчаніе. Полезно замѣтить, что формулы пройденнаго пространства въ равноускоренномъ и равнозамедленномъ движеніяхъ съ начальной скоростью v_0 представляютъ не что иное, какъ сумму или разность пространствъ, проходимыхъ тѣломъ въ равномерномъ движеніи со скоростью v_0 и въ равноускоренномъ движеніи безъ начальной скорости.

Дѣйствительно, если

$$s_1 = v_0 t \text{ и } s_2 = \frac{at^2}{2}, \text{ то } s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = s_1 + s_2.$$



Свободное паденіе и вертикальное восхожденіе тѣлъ.

§ 26 Въ случаѣ тѣлъ свободно падающихъ или брошенныхъ вертикально вверхъ съ начальной скоростью v_0 , ускореніе $a = g$ и уравненія движенія принимаютъ слѣдующій видъ

Свободное паденіе

$$v = v_0 + gt \quad . \quad . \quad (1)$$

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad . \quad . \quad (2)$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t \quad . \quad . \quad (3)$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} \quad . \quad . \quad (4)$$

Вертикальное восхожденіе.

$$v = v_0 - gt \quad . \quad . \quad (1')$$

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \quad . \quad . \quad (2')$$

$$s = \frac{(v_0 + v)}{2} t \quad . \quad . \quad (3')$$

$$s = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} \quad . \quad . \quad (4')$$

При свободномъ паденіи безъ начальной скорости ($v_0 = 0$) соотвѣстующія формулы будутъ

$$v = gt \quad (1''), \quad s = \frac{gt^2}{2} \quad (2''), \quad s = \frac{v^2}{2g} \quad (3''), \quad s = \frac{v^2}{2g} \quad (4'').$$

§ 27 Законы свободнаго паденія тѣлъ въ безвоздушномъ пространствѣ были открыты великимъ итальянскимъ ученымъ Галилео Галилеемъ (1564—1642), справедливо считающимся основателемъ современной механики. Они легко выводятся изъ двухъ основныхъ уравненій $v = gt$ и $s = \frac{gt^2}{2}$.

Замѣтимъ прежде всего, что такъ какъ въ формулы § 26 не входятъ выраженія объема и вѣса, то отсюда прямо слѣдуетъ, что въ безвоздушномъ пространствѣ *все тѣла*, большія и малыя, легкія и тяжелыя, *падаютъ одинаково*, т. е. въ одинаковыя промежутки времени, начиная съ начала паденія, проходятъ равныя пространства и въ одни и тѣ же моменты времени имѣютъ одну и ту же скорость.

Галилей, открывъ этотъ основной законъ, подтвердилъ его опытомъ, заставляя падать съ высоты наклонной башни въ 200 футовъ въ городѣ Пизѣ различные предметы, между прочимъ стофунтовую бомбу и полуфунтовое ядро. Бомба и ядро достигали

летали почти въ одно и то же время: ядро отставало отъ бомбы только чѣмъ на половину ширины ладони. Эту небольшую разницу Галилей объяснялъ вліяніемъ сопротивленія воздуха, равнѣяемаго падающими тѣлами.

§ 28. Это предположеніе блистательно оправдалось слѣдующимъ опытомъ Ньютона. Взята была стеклянная трубка длиною около сажени, съ одного конца наглухо закрытая, а съ другого съуженная оправой, которая оканчивалась гайкой съ краномъ. Посредствомъ этой гайки трубка привинчивалась къ воздушному насосу. Помѣстивъ въ трубку различные мелкіе предметы: ключи, семки, перышки, кусочки дерева и проч., выкачивали изъ нея воздухъ. Закрывъ затѣмъ кранъ, быстро переворачивали трубку. Оказалось, что все заключенныя въ ней предметы падали на дно совершенно одинаково быстро. Впускавъ немного воздуха, замѣчали, что легкіе тѣла нѣсколько задерживались въ своемъ паденіи. Наконецъ, совершенно открывъ кранъ и выпустивъ весь воздухъ, увидѣли, что всѣ тѣла изъ трубки проходятъ совершенно одинаково, какъ и въ старомъ воздухѣ.

Нимъ знаменитымъ опытомъ было вполне опровергнуто старинное предположеніе, высказанное за 300 лѣтъ до Рожденія Христова греческимъ философомъ Аристотелемъ и державшееся въ силѣ почти 2000 лѣтъ среди большинства ученыхъ, а именно, что скорость паденія каждаго тѣла пропорціональна его вѣсу*).

§ 29. Изъ уравненія $s = \frac{gt^2}{2}$, при $t = 1$, находимъ

$$s = \frac{g}{2} \text{ или } g = 2s,$$

т. е. пробѣгъ свободно падающаго тѣла равенъ удвоенному пробѣгу, пройденному тѣломъ въ первомъ секундѣ. Измѣривъ тщательно это пространство, Галилей нашелъ, что па-

*) Тамъ же Галилей опровергаетъ ученіе Аристотеля, остроумно указывая на заключающееся въ немъ внутреннее противорѣчіе. Если тяжелое тѣло падаетъ быстрее легкаго, то какъ должны падать два тѣла: легкое и тяжелое, связанные вмѣстѣ? Съ одной стороны на систему двухъ связанныхъ тѣлъ должна падать медленнѣе одно тяжелое, такъ какъ легкое будетъ при паденіи задерживать тяжелое. Съ другой стороны, два связанныхъ тѣла должны падать быстрѣе одного тяжелого тѣла, такъ какъ вѣсъ двухъ вѣсъ болѣе вѣса одного тѣла.

дающее тѣло проходить въ первую секунду 4,9 метра или 16,1 фута, и что, слѣдовательно, ускореніе $g = 9,8$ метра $= 32,2$ фута.

Галилею же принадлежать слѣдующіе основные законы паденій тѣлъ, а слѣдовательно и всякаго равно-ускореннаго движенія безъ начальной скорости:

Приобретенная скорости пропорциональны временамъ.

Пройденныя пространства пропорциональны квадратамъ времени.

Дѣйствительно, если тѣло двигалось

$$\begin{array}{lcl} \text{1 сек.} & \text{то скорость его } v = gt, & \text{а пройденное пространство } s = \frac{gt^2}{2}, \\ t' & & \\ t'' & & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} & v' = gt', & \\ & v'' = gt'', & \end{array} \quad \begin{array}{lcl} & s' = \frac{gt'^2}{2}, & \\ & s'' = \frac{gt''^2}{2}, & \end{array}$$

Отсюда находимъ

$$\begin{array}{l} t : t' = gt : gt' \quad \text{или} \quad t : t' = v : v' \\ s : s' = \frac{gt^2}{2} : \frac{gt'^2}{2} \quad \text{или} \quad s : s' = t^2 : t'^2. \end{array}$$

Такимъ образомъ пространства, проходимыя падающимъ тѣломъ въ 3 и 5 секундъ, относятся между собой какъ $3^2 : 5^2$ или какъ 9 : 25.

Наконецъ, замѣтимъ, что пространство, проходимое въ первую секунду $\frac{g}{2}$, въ двѣ секунды $\frac{g}{2} \cdot 4$, въ три сек. $\frac{g}{2} \cdot 9$, въ четыре сек. $\frac{g}{2} \cdot 16$ и т. д., находимъ, что пространство, проходимое во

вторую секунду $= \frac{4g}{2} - \frac{g}{2} = \frac{3g}{2}$; въ третью сек.: $\frac{9g}{2} - \frac{4g}{2} = \frac{5g}{2}$;
въ четвертую секунду: $\frac{16g}{2} - \frac{9g}{2} = \frac{7g}{2}$.

Отсюда заключаемъ, что пространства, проходимыя послѣдовательно въ 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю сек. относятся между собой, какъ $\frac{g}{2} : \frac{3g}{2} : \frac{5g}{2} : \frac{7g}{2}$.., или какъ 1 : 3 : 5 : 7... , т. е. какъ рядъ нечетныхъ чиселъ, начиная съ единицы.

§ 30. Движеніе тѣла, брошеннаго вертикально вверхъ. Положимъ, что нѣкоторое тѣло брошено съ поверхности земли вертикально вверхъ. Требуется найти: 1°. въ теченіе какого вре-

мени оно будетъ подниматься; 2^о, до какой высоты оно поднимется; 3^о, въ теченіе какого времени оно будетъ падать обратно на землю; 4^о, какую скорость оно будетъ имѣть при концѣ паденія?

Очевидно, что это тѣло будетъ подниматься равномерно-замедленно до тѣхъ поръ, пока скорость его не будетъ равна 0. Следовательно, полагая въ уравненіи скорости $v = v_0 - gt$ величину конечной скорости $v = 0$, найдемъ время восхожденія тѣла вверхъ:

$$0 = v_0 - gt; \quad t = \frac{v_0}{g} \dots \dots \dots (1).$$

Зная время прохожденія t , найдемъ высоту h подъема по уравненію $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gv_0^2}{2g^2}$; или $h = \frac{v_0^2}{2g} \dots \dots (2)^*$

Поднявшись на эту высоту, тѣло будетъ свободно падать обратно внизъ безъ начальной скорости. Такъ какъ при этомъ, по ур-ю (1') $h = \frac{v^2}{2g}$, то, сравнивая это ур-е съ ур-емъ (2)

$h = \frac{v^2}{2g}$, находимъ, что $\frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}$ или, что $v = v_0 \dots (3).$

Наконецъ время паденія t_1 опредѣлимъ по уравненію скорости $v = gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v}{g}$. Сравнивая это ур-е съ ур-емъ $t = \frac{v_0}{g}$ и, принимая во вниманіе, что $v = v_0$, заключаемъ, что $t_1 = t$. Итакъ: 1^о, тѣло будетъ падать внизъ столько же времени, сколько оно поднималось вверхъ ($t_1 = t$) и 2^о, при концѣ паденія оно будетъ имѣть такую же скорость, какъ и при началѣ восхожденія вверхъ.

Такимъ образомъ, каждой высотѣ подъема соответствуетъ своя опредѣленная скорость паденія и, обратно, всякой скорости паденія соответствуетъ своя опредѣленная высота подъема. Вслѣдствіе такого замѣчательнаго свойства, выраженіе $h = \frac{v^2}{2g}$ называютъ *абсолютной, соответствующей скорости паденія* (1), а получающуюся

*) Величину $h = \frac{v_0^2}{2g}$ еще проще можно было найти по уравненію $h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g}$, положивъ въ немъ $v = 0$.

отсюда формулу $v = \sqrt{2gh}$ называют скоростью, соответствующей высоте подъема (h).

§ 31. Не трудно доказать, что скорости брошенного вверх и затем свободно падающего тела будут равны не только в крайних точках A и B , но и во всякой произвольной точке (C) его пути (фиг. 1) или, иначе говоря, что всякой высоте h_1 , считая ее отъ поверхности земли, будет соответствовать одна и та же скорость V_1 , все равно, будет ли тело подниматься вверх или свободно падать.



Фиг. 1.

Действительно по ур-ю (4') § 26, имеем, что высота восхождения $AC = h_1 = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g}$ (a),

гдѣ v_1 есть скорости въ точкѣ C при восхожденіи тѣла.

Если назовемъ черезъ v_2 скорость въ той же точкѣ C , приобретенную тѣломъ при паденіи съ высоты BC , то по ур-ю (4)

§ 26, имѣемъ, что та же величина $AC = h_1 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$ (b)

Сравнивая равенства (a) и (b), находимъ, что $\frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$, откуда, принимая во вниманіе, что $v_0 = v_2$, получимъ, что $v_1 = v_1$, т. е., что скорость тѣла въ произвольной точкѣ C его пути будетъ одна и та же, поднимается ли оно вверхъ или свободно падаетъ внизъ.

Замѣтивъ это, приходимъ къ заключенію, что всякой скорости v_1 тѣла, поднимающагося вертикально вверхъ или свободно падающаго внизъ, соответствуетъ своя определенная высота $h_1 = \frac{v^2 - v_1^2}{2g}$ (1) и обратно, что всякой высоте точки его пути соответствуетъ своя определенная скорость $v_1 = \sqrt{2g(h - h_1)}$ *), гдѣ h — полная высота подъема или паденія, а v — конечная скорость при паденіи или начальная при подѣмѣ.

*) Эта формула легко получается изъ предыдущаго равенства $h - h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$.

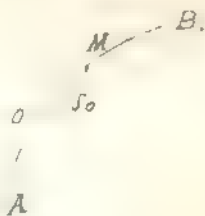
Формулы предыдущаго §: $h = \frac{v^2}{2g}$ и $v = \sqrt{2gh}$, относящіяся къ конечнымъ точкамъ A и B пути, прямо выводятся изъ только что полученныхъ болѣе общихъ формулъ, если положить въ (1) $v_1 = 0$ (для точки B), а въ (2) $h_1 = 0$ (для точки A).

Уравненія движенія точки по данной траекторіи.

§ 32. Движеніе точки или тѣла разсматриваемаго какъ точка, считается вполне извѣстнымъ, если для cadaго даннаго момента времени возможно опредѣлить, *гдѣ* находится движущаяся точка, а также ея *скорость* и *ускореніе* въ этотъ моментъ.

Для этого нужно знать: 1°, *траекторію* движенія точки, 2°, *положеніе ея на этой траекторіи въ начальный моментъ времени*, т. е. въ моментъ, съ котораго мы начинаемъ разсмотрѣніе движенія, и 3°, *зависимость между пространствомъ, пройденнымъ точкою и временемъ*.

Положимъ, что извѣстна траекторія AB движущейся точки (фиг. 2) а также извѣстно разстояніе $OM = s_0$ этой точки отъ некоторой постоянной точки O траекторіи въ начальный моментъ времени. Эту постоянную точку O траекторіи обыкновенно называютъ *началомъ разстояній*. Разстоянія по траекторіи, откладываемыя отъ нея въ одну сторону (напр., вправо), считаются *положительными* а въ другую сторону (напр., влѣво)—*отрицательными*. Въ частномъ случаѣ въ начальный моментъ времени движущаяся точка можетъ находиться въ началѣ разстояній. Тогда $s_0 = 0$.



Фиг. 2.

Если, кромѣ этихъ данныхъ, будетъ еще извѣстна зависимость проходимата точкой пространства отъ времени, то движеніе точки будетъ вполне извѣстно.

§ 33. Разсмотримъ сперва знакомыя ужъ намъ *прямолинейныя* движенія: равномерное и равнопеременныя. Траекторіей, следовательно, въ этихъ случаяхъ будетъ *прямая линия*.

I. Движение равномерное. Расстояние движущейся точки въ начальный моментъ движенія отъ постоянной точки O траекторіи (отъ начала разстояній) пусть будетъ s_0 . Зависимость проходимого пространства отъ времени, какъ извѣстно, выражается уравненіемъ $s = vt$ (1). Буквой s будемъ теперь означать не величину пройденнаго пути, но *разстояніе движущейся точки отъ начала разстояній*, т. е. отъ определенной точки (O) траекторіи. Замѣтимъ, что начальное разстояніе точки, т. е. разстояніе точки въ начальный моментъ времени (при $t = 0$) будетъ s_0 , легко заключаемъ что въ концѣ времени t разстояніе точки будетъ

$$s = s_0 + vt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Уравненіе (2) называется *уравненіемъ равномернаго движенія*. Зная это уравненіе, не трудно указать мѣсто движущейся точки для каждаго момента времени, подставляя вмѣсто t число единицъ времени, предшествовавшихъ этому моменту.

Напр., чтобы узнать разстояніе точки отъ начала (O) разстояній въ началѣ 5-й секунды, надо положить $t = 4$ и т. д.

Скорость точки есть величина постоянная. Чтобы ее опредѣлить, напишемъ уравненіе этого движенія для промежутка времени t_1 .

Тогда
$$s_1 = s_0 + vt_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Вычитая почленно изъ ур-ія (3) ур-іе (2), и раздѣливъ обѣ части на величину промежутка $t_1 - t$, получимъ

$$v = \frac{s_1 - s}{t_1 - t},$$

т. е. *скорость равномернаго движенія равна отношенію приращеннаго пространства къ времени*, что, впрочемъ, найдено было уже ранее.

II. Движение равно-ускоренное безъ начальной скорости. Зависимость между проходимымъ пространствомъ и временемъ выражается уравненіемъ $s = \frac{at^2}{2}$. Прибавляя во второй части разстояніе s_0 движущейся точки въ начальный моментъ, получимъ уравненіе этого движенія $s = s_0 + \frac{at^2}{2}$, гдѣ s означаетъ *разстояніе движущейся точки отъ постоянной точки O траекторіи*

Скорости точки въ произвольный моментъ t опредѣляется уравненіемъ $v = at$.

III. Движеніе равно-ускоренное съ начальной скоростью v_0 , и движеніе равно-замедленное выразится, очевидно, уравненіями

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \text{ и } s = s_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}$$

Скорости этихъ уравненій, какъ извѣстно, опредѣляются уравненіями $v = v_0 + at$ и $v = v_0 - at$.

Очень понятно, что уравненія проходимыхъ пространствъ въ этихъ движеніяхъ, s и s_0 уравненія

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}; s = v_0 t - \frac{at^2}{2}; s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и уравненіями движеній въ томъ случаѣ, если въ начальный моментъ ($t = 0$) движущаяся точка находилась въ началѣ разстояній ($s_0 = 0$).

§ 34 Изъ предыдущаго видно, что равномерное движеніе выражается уравненіемъ 1-й степени, а равномерно переменныя движенія выражаются уравненіями 2-й степени относительно переменной величины t .

Теперь спрашивается, какими уравненіями опредѣляются другія переменныя движенія? На это замѣтимъ, что могутъ быть выражены уравненіями только тѣ движенія, въ которыхъ имѣется некоторая опредѣленная закономѣрная зависимость между проходимымъ пространствомъ и временемъ. Эти зависимости могутъ быть очень разнообразны а следовательно, и уравненія этихъ движеній имѣютъ самый разнообразный видъ. Это будутъ или алгебраическія уравненія выше 2-й степени относительно переменной величины t , какъ напр., уравненіе $s = 2 - 3t + t^3$, или тригонометрическія уравненія, какъ напр., $s = 5 + \sin 2t$ и т. д.

Посредствомъ этихъ уравненій мы точно также можемъ на данной траекторіи указать мѣсто движущейся точки въ произвольный моментъ времени.

Возьмемъ для примѣра уравненіе $s = 2 - 3t + t^3$. Замѣтимъ, что, при $t = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, разстояніе $s = 2, 0, 4, 20, 54, \dots$. Следовательно, движущаяся точка въ начальный моментъ находилась на разстояніи 2-хъ единицъ длины (метровъ, футовъ и т. д.)

отъ начала разстояній, затѣмъ въ теченіе первой секунды приближалась къ нему и окончательно пришла въ него въ концѣ 1-й секунды. Затѣмъ съ начала 2-й секунды она перемѣнила направленіе и стала удаляться вправо отъ начала разстояній съ весьма быстро возрастающей скоростью.

Опредѣленіе скорости и ускоренія перемѣнныхъ прямолинейныхъ движеній.

§ 35. Во всякомъ перемѣнномъ движеніи, за исключеніемъ равноускореннаго и равнозамедленнаго, скорость и ускореніе представляютъ перемѣнныя величины, измѣняющіяся въ каждыя слѣдующій моментъ времени. Поэтому понятія объ этихъ перемѣнныхъ величинахъ составили, удобоудля ихъ болѣе простыми, уже извѣстными понятіями постоянной скорости равномернаго движенія и постоянного ускоренія равномерно-ускореннаго движенія (равно-ускореннаго или равно-замедленнаго).

Скоростью перемѣннаго движенія точки (или тѣла, рассматриваемого, какъ точка) *въ данный моментъ времени* t называютъ ту скорость, которой обладала бы эта точка, если бы, начиная съ этого момента, скорость движенія вдругъ перестала измѣняться (сдѣлалась постоянной), т. е., если бы съ этого момента движеніе изъ перемѣннаго обратилось въ равномерное.

Но скорость равномернаго движенія точки измѣряется пространствомъ, которое пройдетъ эта точка въ единицу времени. Слѣдовательно, скорость перемѣннаго движенія въ данный моментъ времени измѣряется тѣмъ пространствомъ, которое прошла бы точка въ слѣдующую за этимъ моментомъ единицу времени (секунду) если бы, начиная съ этого момента, движеніе вдругъ сдѣлалось равномернымъ.

Совершенно подобнымъ образомъ, *ускореніемъ перемѣннаго движенія точки въ данный моментъ времени* t называютъ то ускореніе, которое имѣла бы эта точка, если бы, начиная съ этого момента, ускореніе движенія вдругъ перестало измѣняться (сдѣлалось постояннымъ), т. е., если бы съ этого момента движеніе изъ перемѣннаго обратилось въ равномерно-перемѣнное.

Но ускореніе равномерно-перемѣннаго движенія есть постоянная величина измѣненія скорости въ единицу времени. Слѣдовательно, ускореніе перемѣннаго движенія точки въ данный моментъ времени, есть то измѣненіе скорости, которое получила бы эта точка въ слѣдующую за этимъ моментомъ единицу времени (секунду), если бы, начиная съ этого момента, движеніе вдругъ обратилось въ равномерно-перемѣнное.

Какъ уже извѣстно, *среднюю скорость* перемѣннаго движенія точки *въ какомъ промежуткѣ времени* называютъ скоростью такого равномернаго движенія, въ которомъ точка въ этотъ промежутокъ времени прошла бы такое же точно пространство, какъ и въ перемѣнномъ движеніи. Поэтому что-

Возьмем промежуток времени в $\frac{1}{4}$ секунды.

Средняя скорость за 4-ю четверть 1-й секунды

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{2 + 1 - 2 - (1/4)^3}{1/4} = \frac{1 - 1/16}{1/4} = \frac{15}{16} = 2,3125$$

Средняя скорость за 1-ю четверть 2-й секунды

$$\frac{s_1 - s_1}{t_1 - t_1} = \frac{2 + (1/4)^3 - 2 - 1}{1/4} = \frac{1/16 - 1}{1/4} = -3,8125.$$

Как мы видим, величины средних скоростей приближаются к нулю уменьшения промежутков. Возьмем еще меньшие промежутки.

Средняя скорость для смежных промежутков в 0,1 секунды

$$\frac{s_1 - s_0}{0,1} = \frac{2 + 1 - 2 - 0,729}{0,1} = \frac{0,271}{0,1} = 2,71.$$

$$\frac{s_1 - s_1}{0,1} = \frac{2 + 1,331 - 2 - 1}{0,1} = \frac{0,331}{0,1} = 3,31.$$

Средняя скорость для смежных промежутков в 0,01 секунды

$$\frac{s_1 - s_0}{0,01} = \frac{2 + 1 - 2 - 0,970299}{0,01} = \frac{0,029701}{0,01} = 2,9701.$$

$$\frac{s_1 - s_1}{0,01} = \frac{2 + 1,030301 - 2 - 1}{0,01} = \frac{0,030301}{0,01} = 3,0301.$$

Теперь уже ясно, что средняя скорость, по мере уменьшения промежутков до нуля, безгранично приближается к величине 3, как к пределу. Это предельное значение и есть скорость нашего переменного движения в начале 2-ой секунды.

Вычислим величину этого предела. Для этого определим среднюю скорость переменного движения для весьма малого промежутка времени, составляющего за 1-й секунды. Назовем величину этого промежутка через Δt . Тогда средняя скорость

$$\begin{aligned} \frac{s_1 - s_0}{\Delta t} &= \frac{2 + (1 + \Delta t)^3 - 2 - 1}{\Delta t} = \frac{1 + 3\Delta t + 3\Delta t^2 + \Delta t^3 - 1}{\Delta t} \\ &= \frac{3\Delta t + 3\Delta t^2 + \Delta t^3}{\Delta t} = 3 + 3\Delta t + \Delta t^2 \end{aligned}$$

Чтобы найти предел средней скорости надо положить $\Delta t = 0$. При этом члены, содержащие Δt , обратятся в нуль и мы получим, что предел средней скорости = 3.

Точно такое же значение мы получили бы, если бы вычисляли предельное значение для промежутка времени предшествующего началу 2-ой секунды, при уменьшении величины этого промежутка до нуля. Итак, скорость переменного движения в данный момент времени есть предел средней скорости при уменьшении или промежутка времени, предшествующего или следующему за этим моментом, при безграничном уменьшении этого промежутка до нуля.

Найдем теперь скорость нашего движения в произвольный момент времени t . Для этого вычислим среднюю скорость этого движения для весьма малого промежутка Δt , следующего за данным моментом и затем найдем предел этой средней скорости. Средняя скорость за промежуток

$$t + \Delta t \text{ будет } \frac{s_1 + \Delta t - s_0}{\Delta t} = \frac{2 + (t + \Delta t)^2 - 2 - t^2}{\Delta t} = \frac{3t^2 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3 - t^2}{\Delta t} = 3t + 3t\Delta t + (\Delta t)^2. \text{ Предел средн. скорости (при } \Delta t = 0) = 3t^2.$$

Итак, скорость нашего движения за произвольный момент времени определяется уравнением $v = 3t^2$.

§ 36. Для проверки правильности предельного значения скорости переменного движения вычислим еще скорость в произвольный момент движения выходящего тела без начальной скорости v_0 . Уравнение этого движения $s = \frac{gt^2}{2}$.

$$\text{Средняя скорость для промежутка времени } \Delta t \text{ следующего за моментом } t, \text{ будет } \frac{s_1 + \Delta t - s_0}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{2}g(2t\Delta t + (\Delta t)^2) - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = \frac{gt + \frac{1}{2}g(\Delta t)}{1} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

$$\text{Предел } \frac{s_1 + \Delta t - s_0}{\Delta t} \text{ (при } \Delta t = 0) = gt.$$

Итак, скорость этого движения за произвольный момент t будет, по предельному уравнению $v = gt$, которое уже было нами найдено другим путем.

§ 37. Перейдем теперь к определению ускорения переменного движения в произвольный момент времени.

Мы только что рассмотрели, как по *правильно* переменного *движения* определяется его *скорость*. Совершенно подобным же образом из *предельного значения скорости* переменного движения определяется его *ускорение*.

Возьмем наше прежнее уравнение движения $s = 2 + t^3$ и постараемся определить его ускорение в начале 2-ой секунды.

Мы уже знаем, что уравнение скорости этого движения есть $v = 3t^2$.

Вычислим среднее ускорение в 1-ую и 2-ую секунды движения. Для этого найдем величины изменения скорости за оба эти промежутка времени и разделим их на величину этих промежутков, т. е. на одну секунду.

$$\text{Среднее ускорение за 1-ю секунду } a_1 = \frac{v_1 - v_0}{1} = \frac{3 \cdot 1^2}{1} = 3.$$

$$\text{" " " 2-ю " " } a_2 = \frac{v_2 - v_1}{1} = \frac{3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1^2}{1} = \frac{12 - 3}{1} = 9.$$

*) Начальная скорость $v_0 = 0$, так как из уравнения $v = 3t^2$ следует, что при $t = 0$ и $v = 0$.

Так как найденные величины средних ускорений сильно различаются друг от друга и дают лишь очень грубое понятие об ускорении в начале 2-ой секунды, т. е., что оно больше 3 и меньше 9, то вычленим средние ускорения для более малых промежутков времени, напр. в 0.1 и 0.01 секунды, из которых одним предположим бы моменту начала 2-ой секунды, а другой служил бы за ним.

Средние ускорения для смежных промежутков в 0.1 секунды

$$\begin{aligned} \frac{v_{1.1} - v_{0.9}}{0.1} &= \frac{3.1 - 3.09^2}{0.1} = \frac{3}{0.1} \frac{1.43}{6} = 7 \\ \frac{v_{1.1} - v_1}{0.1} &= \frac{3.11^2 - 3.1}{0.1} = \frac{63}{0.1} = 6.3 \end{aligned}$$

Средние ускорения для смежных промежутков в 0.01 секунды

$$\begin{aligned} \frac{v_{1.01} - v_{0.99}}{0.01} &= \frac{3.1 - 3.099^2}{0.01} = \frac{3}{0.01} \frac{2.9403}{0.01} = 5.97 \\ \frac{v_{1.01} - v_1}{0.01} &= \frac{3.101^2 - 3.1}{0.01} = \frac{3.0603}{0.01} = 6.03 \end{aligned}$$

Как мы видим, средние ускорения по мере уменьшения промежутков времени до нуля, неограниченно приближаются к некоторому пределу. Это предельное значение среднего ускорения есть ускорение переменного движения в начале 2-ой секунды.

Так что, чтобы вычислить величину этого предела, найдем среднее ускорение для весьма малых промежутков времени Δt , следующего за 1-м секундой и этим, из полученномъ выражении найдемъ, что величина

$$\frac{v_{1+\Delta t} - v_1}{\Delta t} = \frac{3(1 + \Delta t)^2 - 3.1}{\Delta t} = 3 + 6\Delta t + 3\Delta t^2 = 3 + \frac{6\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t} = 3 + 6 + 3\Delta t \quad \text{Пределъ выражения } 6 + 3\Delta t \text{ (при } \Delta t = 0) = 6$$

Такимъ образомъ, искомое ускорение в начале 2-ой секунды = 6.

Такое же точно значение мы получили бы, вычисляя предель средняго ускорения для промежутка времени, предшествующаго данному моменту, при уменьшении величины этого промежутка до нуля.

Такъ, такъ какъ средняя величина, которая уменьшается до нуля средняго ускорения для промежутка времени, предшествующаго или следующаго данному моменту, при уменьшении этого промежутка до нуля.

§ 38 Перейдемъ теперь къ болѣе общему вопросу, какъ определить ускорение данного переменнаго движения въ любой моментъ времени, или иначе говоря, какъ найти уравнение, связывающее два переменныя величины: ускорение a и время t .

Для этого положимъ что слѣдуетъ найти ускорение для произвольнаго момента напр. для конца t -ой секунды.

Согласно предыдущему, найдемъ сперва среднее ускорение для весьма малю промежутка времени Δt слѣдующаго за этимъ моментомъ и за

твѣмъ опредѣляютъ прѣдѣлъ средняго ускоренія, предполагая, что промежутокъ Δt уменьшается до нуля.

$$\text{Среднее ускореніе} = \frac{v_1 + \Delta v - v_1}{\Delta t} = \frac{3(1 + \Delta t)^2 - 3 \cdot 1^2}{\Delta t} \\ = \frac{3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 \cdot \Delta t + 3(\Delta t)^2 - 3 \cdot 1^2}{\Delta t} = \frac{6 \cdot 1 \cdot \Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} = 6 + 3 \Delta t.$$

Предѣлъ выраженъ $6 + 3 \Delta t$ при $\Delta t = 0$ — 6 .

Итакъ, искомое ускореніе $a = 6$.

Полученное уравненіе и есть уравненіе ускоренія данного переменнаго движенія. Подставляя въ него имѣетъ t любое значеніе 1, 2, 3, ... секунды мы тогда же получимъ величину ускоренія для конца 1-ой, 2-ой, 3-ей... секунды.

§ 39. Для брѣмври опредѣлимъ еще ускореніе свободнаго паденія безъ начальной скорости v_0 . Уравненіе этого движенія есть $s = \frac{1}{2} g t^2$.

Уравненіе скорости какъ уже было выведено (§ 36) $ctt = g t$.

Среднее ускореніе для промежутка Δt , стѣкающаго въ моментъ конца времени t будетъ

$$a = \frac{v_1 + \Delta v - v_1}{\Delta t} = \frac{g t + g \Delta t - g t}{\Delta t} = \frac{g \Delta t}{\Delta t} = g.$$

Изъ уравненія $s = \frac{1}{2} g t^2$ предѣломъ умноженія скорости и ускоренія мы получимъ также какъ слѣдующими уравненіями:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} g t^2 & a &= 12 \\ v &= g t & a &= 6 t - 2 \\ s &= \frac{1}{2} g t^2 - 3 t^2 & a &= 12 t^2 - 6 t. \end{aligned}$$

Изъ рассмотрѣнныхъ уравн. легко можно замѣтить законъ составленія уравненія скорости изъ уравненія движенія и уравненія ускоренія изъ уравненія скорости, если 2-я члѣтѣ уравненій имѣетъ видъ алгебраическаго многочлена. Именно, чтобы изъ уравненія движенія найти уравненія скорости надо у всѣхъ членовъ, содержащихъ переменную величину t , понизить показателя на 1, а коэффициенты умножить на прежн. показателя, члены же не содержаще пермѣнной t отбросить. Точно такнѣмъ же образомъ изъ уравненія скорости получается уравненіе ускоренія.

Графическій способъ изображенія движеній.

§ 40. Изученіе различныхъ движеній заставляеть насъ различать два рода величинъ, характеризующихъ движеніе, а именно величины *постоянныя* и величины *переменныя*.

Такъ мы знаемъ, что скорость въ равномерномъ движеніи и ускореніе въ равномерно-переменномъ движеніи суть постоянныя величины. Наоборотъ, пространство и время во всякомъ движеніи

суть величины переменныя. Точно также, скорость въ переменномъ движеніи, а также ускореніе во всякомъ переменномъ движеніи, кромѣ равномерно-ускореннаго и равномерно-замедленнаго, также суть переменныя величины.

Это справедливо только относительно *прямолинейныхъ* движеній. Въ дальнейшемъ мы увидимъ, что въ *криволинейныхъ* движеніяхъ скорость и ускореніе *сестъ* будутъ переменными величинами, *тогда въ эти движенія были и равнодѣльными*

§ 41. Рассматривая различнаго рода уравненія движенія:

$$s = s_0 + vt, \quad s = \frac{at^2}{2}; \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}; \quad s = 3 + 2t + t^2,$$

а также уравненія скорости и ускоренія:

$$v = v_0 + at, \quad v = 2 + 3t^2; \quad a = 6t.$$

мы легко замѣчаемъ, что всѣ переменныя величины, какъ-то пространство s , скорость v , ускореніе a являются переменными зависимыми или *функциями* одной и той же переменной независимой, а именно времени t .

Опредѣлить въ каждомъ частномъ случаѣ видъ этой функции или, говоря иначе, составить уравненіе, связывающее эти величины съ временемъ t , и значить *найти аналитически законъ движенія отъ этого частного случая*.

Въ общемъ видѣ функциональную зависимость между переменными величинами изображаютъ буквами F, f, Φ, ϕ , и т. д.

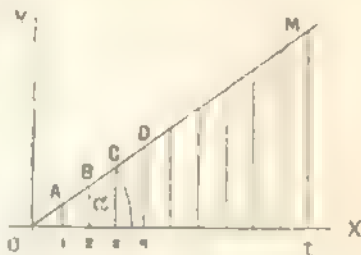
Такимъ образомъ $s = F(t)$, $v = f(t)$ и т. п.

§ 42. Познакомимся теперь съ *графическимъ изображеніемъ законовъ движенія*. Этотъ способъ, уступаая въ точности *аналитическому* (выраженію законовъ движенія уравненіемъ), превосходитъ его своею наглядностью.

Построимъ, во-первыхъ, линію пространства, проходимого точкой въ равномерномъ движеніи, предполагая, что въ начальный моментъ времени (т. е. при $t = 0$) точка находилась въ началѣ разстояній ($s_0 = 0$).

Вопросъ сводится, слѣдовательно, къ построенію уравненія $s = vt$, гдѣ v есть нѣкоторая *постоянная величина* (2, 3, 4, ..., сантим. и т. п.).

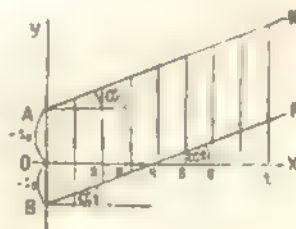
Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ OX и OY (фиг. 3) и на одной изъ нихъ, напр., на оси x -въ отложимъ отъ начала O координатъ въ опредѣленномъ масштабѣ равныя части 1, 2, 3... t , соответствующія единицамъ времени (напр., секундамъ), затѣмъ изъ точекъ дѣленія возставимъ перпендикуляры и на нихъ отложимъ величины $A_1, B_2, C_3 \dots$ соответственно пройденныхъ пространствъ (также въ опредѣленномъ масштабѣ). Соединивъ полученные точки $A, B, C \dots$ съ точкой O , получимъ искомую линию OM и пространство между кривою OM и осью x будетъ *графикъ*, такъ какъ выражаетъ $x = \int v dt$ (см. § 101, стр. 104 *).



Фиг. 3.

Но такъ какъ, въ данномъ пространствѣ въ данномъ промежуткѣ времени t скорость v можетъ изменяться, то находится въ ней *ускореніе* a (см. § 101, стр. 104).

Если начальное разстояние s_0 точки находится *направо* отъ начала разстояній, то оно считается *положительнымъ* и откладывается по оси y -въ *вверхъ* отъ точки O , а если оно находится *влево* отъ начала разстояній, то считается *отрицательнымъ* и откладывается *внизъ* отъ точки O (фиг. 4). Въ остальномъ построение вполне тождественно съ предыдущимъ. Прямая AN представляетъ графически уравнение $s_1 = s_0 + v_1 t$, а прямая BP — уравнение $s_2 = -s_0 + v_2 t$ **).



Фиг. 4.

*) Нужно помнить, что *каждая точка* на прямой OM представляетъ къ оси x -въ характеристику скорости *выжиги*. Действительно изъ формулы найдемъ, что $\frac{v_1}{v_2} = \frac{B_2}{A_1} = \dots = \tan \alpha$. Но отношения $\frac{v_1}{v_2} = \frac{B_2}{A_1} = \dots$ суть отношения пройденныхъ пространствъ къ времени и, следовательно, представляютъ *характеристику* ускоренія *выжиги*. Итакъ $\tan \alpha = \frac{v_1}{v_2}$, т. е. скорость прямолинейнаго движенія есть тангенсъ угла наклона прямой пространствъ къ оси x -въ (къ оси времени).

**) Очевидно, что $v_1 = \tan \alpha_1$, а $v_2 = \tan \alpha_2$.

Въ точку K , соответствующей концу 4-ой секунды, прямая BP пересекает ось x -въ. Это показываетъ, что движущаяся точка, находившаяся первоначально влѣво отъ начала разстояній, въ концѣ 4-ой секунды пришла въ эту точку, а затѣмъ стала отъ нея удаляться вправо (фиг. 5).



Фиг. 5.

Очевидно, что не слѣдуетъ смѣшивать *линию пространства*, т. е. линію, графически выражающую зависимость между пройденнымъ пространствомъ и временемъ, съ *траекторіей*, или путемъ движущейся точки. Въ криволинейномъ равномерномъ движеніи уравненіе пройденнаго пространства будетъ такое же, какъ и въ прямолинейномъ, т. е. $s = vt$, т. е.

линія пространства будетъ *прямая*, хотя *траекторія* будетъ *кривая линія*.

§ 43. Построимъ точно такимъ же способомъ линію пространства равномерно-ускореннаго движенія безъ начальной скорости при условии, что въ начальный моментъ ($t = 0$) точка находится въ началѣ разстояній ($s_0 = 0$), т. е. построимъ уравненіе

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Линія пространства (фиг. 6) будетъ въ этомъ кривою, а именно *параболою*, вершина которой совпадаетъ съ началомъ O координатъ.

Кривыя пространствъ равномерно-ускоренныхъ движеній

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad \text{и} \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

также представляютъ *параболы* *), но съ вершиною, не находящеюся въ началѣ координатъ. На фиг. 7 изображены три кривыя, соответствующія тремъ частнымъ случаямъ уравненій равномерно-ускореннаго движенія, а именно уравненіямъ

$$s_1 = 1,5 t^2, \quad s_2 = 2t + 1,5 t^2 \quad \text{и} \quad s_3 = 4 + 2t + 1,5 t^2$$

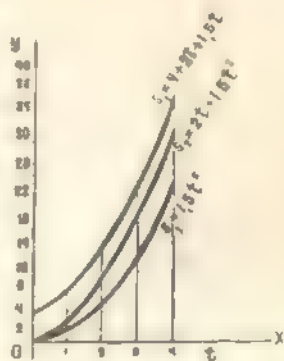
т. е. при $a = 3$; $v_0 = 2$ и $s_0 = 4$.

*) Такъ какъ всякое уравненіе въ которомъ одна переменная, въ той степени, а другая 2-й степени графически представляется параболою.

и, ввиду пространства равномерно-замедленных движений так-же будут параболы, но обращенныя не выпуклой, а вогнутой стороной къ оси x въ (къ оси время).

Линии пространства другихъ перемѣнныхъ движений представляютъ много различныхъ кривыя.

4. Совершенно такимъ же образомъ строится линия скоростей и ускореній. Чтобы построить линию скорости равномернаго движения, откладываемъ на оси x въ (время) равныя отѣсѣныя (фиг. 7), соответствующія 1, 2, 3, 4 единицамъ времени, а на вертикальныхъ перпендикулахъ откладываемъ одинаковыя величины скорости (напримѣръ 1, 2, 3, 4).



Фиг. 7.

Полная AB , соединяющая концы перпендикуляровъ и параллельная оси время, выражаетъ искомую величину скорости. Слѣдуетъ замѣтить, что величина пройденнаго пространства s выражается площадью треугольника OAB такъ какъ $OA = v$, $Ot = t$, а $s = vt$.

Линия скорости въ равноускоренномъ движеніи безъ начальной скорости ($v = at$) изображится, очевидно, прямою OA проходящею черезъ начало O координатъ и наклонною къ



Фиг. 8.

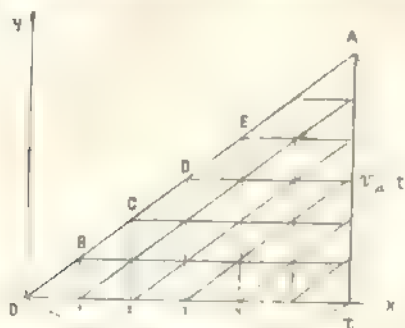
оси время *) at (фиг. 9). Площадь \triangle -ка $OAt = \frac{at^2}{2}$ выражаетъ величину s пройденнаго пространства.

*) Можно замѣтить, что ускореніе въ равно-ускоренномъ движеніи at равноется углу наклона линии скорости къ оси время at . Действительно отношеніе $\frac{v}{t} = at$. Но отношеніе скорости къ времени въ равно-ускоренномъ движеніи и есть ускореніе такъ какъ изъ уравн. $v = at$

получимъ $a = \frac{v}{t}$. И такъ $a = \frac{v}{t}$ или a, t — ускореніе равно-ускореннаго движенія.

А выражающіяся ниже кривыя — это наклонъ линии скорости къ оси время.

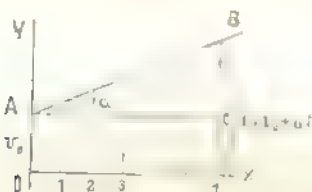
Проведя изъ точекъ 1, 2, 3 .. прямыя, параллельныя OA , а изъ точекъ пересѣченія перпендикуляровъ съ прямою OA — прямыя, параллельныя оси x -въ, разобьемъ площади, выражающыя



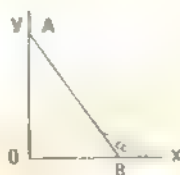
Фиг. 9.

величины пройденныхъ пространствъ на равныя треугольники. Изъ чертежа видно, что отношеніе площадей: $OB1 : OC2 : OD3 : \dots = 1 : 2^2 : 3^2 : \dots$, а отношеніе площадей $OB1 : BC12 : CD23 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots$, т. е., что пространства, проходимыя въ одну, двѣ, три... единицы времени, относятся, какъ квадраты соответствующихъ

временъ, а пространства, проходимыя въ первую, вторую, третью... единицу времени, какъ рядъ нечетныхъ чиселъ, что и выведено было ранее (§ 28).



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Въ равно-ускоренномъ движеніи съ начальной скоростью линія скоростей ($v = v_0 + at$) изображаетъ, прямою AB (фиг 10), а величина пройденнаго пространства площадью площади $OAB = \frac{(v_0 + v) t}{2} = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ *)

*) Замѣтимъ, что трапеція $OABt$ состоитъ изъ прямоугольника $OAtv_0$, выражающаго пространство, пройденное въ время t въ равномерномъ движеніи со скоростью v_0 , и треугольника ABt , выражающаго пространство, пройденное въ то же время въ равноускоренномъ движеніи, съ ускореніемъ a .

Читателямъ, усвоившимъ сущность графическаго способа, не трудно догадаться линіи какихъ скоростей движеній изображены на фиг. 11 и 12 *).

Въ общемъ случаѣ переменнаго движенія, въ которомъ не только скорость, но и ускореніе — переменная величина, если скорости изобразятся нѣкотою кривою, напр., AB (фиг. 13).

Прямая OAB , замыкаемая этой кривою, есть время t и двумя ординатами AO и B , представляется, какъ и раньше, пространствомъ, опредѣливъ среднюю арифметическую изъ скоростей, вычисленныхъ ординатами AO, A_1, A_2, \dots, B , найдемъ прямую A_0O — среднюю скорость.

Слѣдовательно, площадь OAB есть

полный путь, пройденный теломъ.

Если же мы проведемъ прямую A_0B_0

параллельно A_0O и перпендикулярно

къ оси времени t , получимъ прямоуголь-

никъ $O.A_0B_0.t$, равновеликій

площади OAB , и, слѣдова-

тельно, также представляющій

величину пути, пройденнаго

во время t .

Упражнения. Построить линіи про-

странствъ, скоростей и ускоре-

ній слѣдующихъ движеній:

1. Свободнаго паденія тѣла. $s = \frac{gt^2}{2} = 16t^2$ (фут) $= 4,9$ (метр.)

2. $s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $v_0 = 4$ м.

3. $s = s_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $s_0 = 2$ м; $v_0 = 4$ м.

4. $s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, гдѣ $v_0 = 30$ м.

5. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

6. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

7. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

8. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

9. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

10. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

11. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

12. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

13. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

14. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

15. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

16. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

17. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

18. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

19. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

20. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

21. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

22. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

23. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

24. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

25. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

26. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

27. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

28. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

29. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

30. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

31. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

32. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

33. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

34. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

35. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

36. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

37. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

38. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

39. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

40. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

41. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

42. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

43. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

44. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

45. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

46. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

47. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

48. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

49. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

50. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

51. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

52. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

53. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

54. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

55. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

56. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

57. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

58. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

59. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

60. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

61. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

62. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

63. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

64. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

65. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

66. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

67. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

68. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

69. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

70. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

71. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

72. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

73. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

74. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

75. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

76. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

77. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

78. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

79. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

80. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

81. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

82. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

83. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

84. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

85. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

86. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

87. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

88. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

89. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

90. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

91. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

92. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

93. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

94. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

95. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

96. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

97. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

98. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

99. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

100. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

101. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

102. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

103. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

104. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

105. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

106. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

107. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

108. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

109. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

110. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

111. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

112. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

113. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

114. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

115. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

116. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

117. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

118. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

119. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

120. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

121. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

122. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

123. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

124. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

125. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

126. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

127. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

128. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

129. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

130. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

131. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

132. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

133. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

134. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

135. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

136. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

137. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

138. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

139. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

140. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

141. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

142. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

143. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

144. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

145. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

146. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

147. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

148. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

149. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

150. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

151. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

152. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

153. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

154. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

155. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

156. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

157. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

158. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

159. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

160. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

161. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

162. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

163. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

164. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

165. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

166. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

167. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

168. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

169. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

170. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

171. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

172. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

173. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

174. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

175. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

176. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

177. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

178. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

179. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

180. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

181. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

182. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

183. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

184. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

185. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

186. $s = 3 - t - 2t^2 + t^3$.

187. $s = 3 - t$

6. Построить линію пространствъ движенія, заданнаго слѣд. таблицей:

t (сек.): 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9.
s (метр.): 2; 2,5; 2,8; 3; 3,1; 2,6; 2,1; 1,5; 0,7; 0

Сложеніе прямолинейныхъ движеній.

§ 45. До сихъ поръ, при изученіи движенія, мы предполагали, что точка (или тѣло, разсматриваемое, какъ точка) имѣетъ только какое-нибудь одно определенное прямолинейное движеніе. Въ действительности, однако, точка (или тѣло) можетъ имѣть одновременно нѣсколько движеній по различнымъ направленіямъ и съ различными скоростями или, лучше сказать, точка (или тѣло) имѣетъ одно *сложное* движеніе, составленное изъ нѣсколькихъ *простыхъ* движеній, въ которыхъ она одновременно участвуетъ.

Такъ напр., путешественникъ, гуляющій по палубѣ парохода, идущаго внизъ по рѣкѣ, имѣетъ одновременно слѣдующія движенія: *во-первыхъ*, онъ движется съ извѣстной скоростью по палубѣ по нѣкоторому направленію, которое или одинаково, или прямо противоположно движенію парохода, или наконецъ составляетъ съ нимъ извѣстный уголъ *со стороны* *), при этомъ онъ перемѣщается вмѣстѣ съ пароходомъ по направленію собственнаго движенія парохода *) и съ такою скоростью, съ которою пароходъ двигался бы въ стоячей водѣ; *затѣмъ*, пароходъ вмѣстѣ съ путешественникомъ переносится рѣкою по направленію ея теченія и со скоростью движенія воды въ рѣкѣ. Наконецъ можно принять во вниманіе, что путешественникъ вмѣстѣ съ пароходомъ и съ самою рѣкою участвуетъ въ двойномъ движеніи — или вокругъ ея оси и вокругъ солнца.

Наблюдатель, стоящій на палубѣ того же самаго парохода, можетъ видѣть только одно первое движеніе путешественника. Наблюдатель, стоящій на берегу, видитъ, что движеніе путешественника есть *сложное* или составное изъ трехъ первыхъ *простыхъ* движеній. Это сложное движеніе называется *абсолютнымъ* по отношенію къ неподвижнымъ земнымъ предметамъ, хотя, строго говоря, оно не будетъ абсолютнымъ, такъ какъ сама земля также движется.

*) зависящаго отъ направленія руля.

Если вообразить наблюдателя, находящегося въ неподвижномъ пунктѣ пространства и слѣдяща за путешественникомъ, то только такой наблюдатель могъ бы усмотрѣть истинное абсолютное движеніе путешественника, какъ составное изъ движеній самого путешественника, парохода и, наконецъ, земли.

Определеніемъ истиннаго абсолютнаго движенія занимается *истинная механика*, т. е. наука о движеніи небесныхъ тѣлъ, составляющихъ часть астрономіи. Для цѣли нашего курса совершенно достаточно определить абсолютныя движенія въ только что указанномъ значеніи, т. е. по отношенію къ неподвижнымъ земнымъ предметамъ.

Приведемъ еще примѣры: По горизонтальному прямому желобу, неподвижно лежащему на полу, катится шаръ. Движеніе центра шара будетъ *простое* прямолинейное *). Но если станемъ перегибать желобъ по полу, то движеніе центра шара будетъ уже *сложное*, состоящее изъ движенія шара по желобу, называемаго *относительнымъ* движеніемъ, и движенія желоба по полу, называемаго *переноснымъ* движеніемъ. Переносное движеніе очевидно, есть ничто иное, какъ *движеніе самой траекторіи*, описываемой относительнымъ движеніемъ **).

§ 46 Само собой понятно, что въ томъ случаѣ, когда сложное движеніе состоитъ изъ двухъ простыхъ движеній, направленныхъ *по одной прямой*, пространство, пройденное въ сложномъ движеніи въ какое-то время t , будетъ равно *суммѣ* или *разности*

*, Въ остальныхъ точкахъ шара имѣются *разныя движенія*, составленныя изъ движеній *относительнаго по желобу и переноснаго — изъ катанія*. Движеніе всего шара, разсмотрѣннаго какъ *цѣлое*, составляющіеся изъ *мнѣхъ* различныхъ точекъ, также будетъ *сложное*, составленное изъ *относительнаго* движенія по желобу и *переноснаго* около центра.

**) Дѣйствительно упомянуть еще о такъ называемыхъ *кажущихся движеніяхъ*. Такъ называются движенія, которыя видны наблюдателю, самъ не мѣщающемуся въ пространство. Само собой понятно, что эти движенія не отвѣчаютъ действительности. Такъ напр., мы видимъ, что солнце и звѣзды движутся съ востока на западъ. Эти движенія суть только *кажущіяся*, происходящія оттого, что мы наблюдаемъ ихъ, сами находясь на земномъ шарѣ, вращающемся въ обратномъ направленіи, т. е. съ запада на востокъ. Точно также путешественнику, находящемуся на пароходѣ, кажется, что онъ стоитъ на одномъ мѣстѣ, а берега плывутъ мимо него съ направленіемъ, обратнымъ движенію парохода, и т. д.

ности пространства, пройденных в это же время в каждом из простых движений, смотря по тому, направлены ли они в одну сторону или в прямо-противоположные стороны.

Если оба простых движения суть вместе с тем и равномерны со скоростями v_1 и v_2 , то пространством, пройденное во время t в сложном движении, будет $s = s_1 + s_2 = v_1 t \pm v_2 t = (v_1 \pm v_2) t$ или $s = vt$, где $v = v_1 \pm v_2$.

Итак, сложное движение в этом случае будет также равномерным, и скорость его будет равна сумме или разности скоростей составляющих движений, смотря по их направлению.

Очевидно, что это правило легко распространить на случай, когда сложное движение состоит больше, чем из двух простых движений.

Пример 1. Скорость парохода в стоячей воде равна 4,5 метра в 1", а скорость течения реки 1,2 метра в 1". Найти пространство, пройденное пароходом а) вниз и б) вверх по течению в 10 сек., а также скорость сложного движения в обоих случаях.

Ответ. а) $s = 4,5 + 1,2 = 5,7$ м.; $s = 5,7 \cdot 10 = 57$ м.

б) $s = 4,5 - 1,2 = 3,3$ м.; $s = 3,3 \cdot 10 = 33$ м.

Пример 2. Сохраняя постоянную абсолютную скорость путешественник движется по длине парохода со скоростью 0,4 метра в 1" а пароход движется в длину его перемещения в 10 секунд или пароход идет по течению, а путешественник и с ним прямолинейно а) от кормы к носу парохода и б) обратно.

Ответ. а) $s = 6,1$ м.; $s = 61$ м. б) $s = 5,4$ м. $s = 53$ м.

§ 17. Если оба простых движения *равноускоренны* и направлены по одной прямой, то и сложное движение также будет равноускоренным. В этом сложном движении пройденное пространство, скорость и ускорение будут соответственно равны сумме или разности проходящих простейших, скоростей и ускорений составляющих движений, смотря по их направлению.

$$s = v_0' t + \frac{a' t^2}{2} \pm \left(v_0'' t + \frac{a'' t^2}{2} \right), \quad \text{или}$$

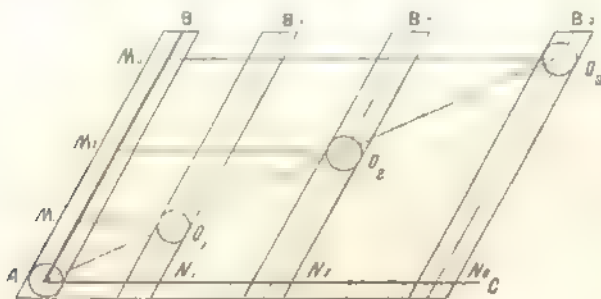
$$s = (v_0' \pm v_0'') t + \frac{a' \pm a''}{2} t^2 = v_0 t + \frac{a t^2}{2}$$

где $v_0 = v_0' \pm v_0''$ и $a = a' \pm a''$.

Итакъ, въ сложныхъ движеніяхъ складываются не только прои-
звольныя пространства или перемѣщенія, но также скорости и
ускоренія составляющихъ движеній.

18. **Параллелограммъ перемѣщений.** Обратимся теперь къ раз-
смотрѣнію сложнаго движенія, составленнаго изъ двухъ простыхъ
движеній, направленныхъ подъ угломъ другъ къ другу. Докажемъ,
что *при сложномъ движеніи перемѣщеніе равно также
равно сумме и равно по величинѣ и направлению сложнаго на-
правленнаго, построеннаго на перемѣщеніяхъ составныхъ движе-
ній, какъ на сторонѣхъ.* (Теорема параллелограмма пере-
мѣщений).

Воспользуемся для точности два уже приведенныхъ примѣра. По-
ложимъ, что по рельсовому пути горизонтальномъ полу желобу
движется шарикъ по направлению AB вѣдь со скоростью v_1 ,
и въ то же время самъ желобъ движется равномерно по
пути AC вѣдь по прямой AC параллельно своему собствен-
ному движению со скоростью v_2 . Требуется опредѣлить абсолют-
ное движеніе шара O пара, движущагося такимъ образомъ равно-
мерно и прямолинейно, одновременно по двумъ направлениямъ:
по AB со скоростью v_1 и по AC со скоростью v_2 . Когда центръ
шара O секунды послѣ начала движенія пройдетъ по пря-
мой AB до точки M_1 — $v_1 t_1$, въ это самое время желобъ, а
вмѣстѣ съ нимъ и шаръ (траекторія) AB перемѣстится по прямой AC
на величину $ON_1 = v_2 t_1$ (фиг. 14).



Фиг. 14.

Очевидно, что въ концѣ времени t_1 центръ шара будетъ находить-
ся въ точкѣ O_1 , которую найдемъ, проведя изъ точки M_1 прямую
 M_1O_1 , параллельную AC до пересѣченія съ прямою N_1K_1 .

Точно также через t_2 секундъ послѣ начала движенія центръ O шара придетъ по AB путь $OM_2 = v_2 t_2$, а сама прямая AB пройдетъ путь $ON_2 = v_2 t_2$, вследствие чего центръ шара перемѣстится въ точку O_2 .

Соединимъ точки O_1 и O_2 съ точкой O и докажемъ, что прямыя OO_1 и OO_2 составляютъ одну и ту же прямую.

\triangle -къ OO_1N_1 подобенъ \triangle -ку OO_2N_2 , такъ какъ $\angle N_1 = N_2$ и $\frac{ON_1}{ON_2} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2}$ *). Поэтому $\angle O_1ON_1 = \angle O_2ON_2$, а это возможно только тогда, когда прямая OO_1 и OO_2 представляютъ одну и ту же прямую.

Точно также можно доказать, что через t_3 секундъ центръ шара будетъ находиться въ точкѣ O_3 , лежащей на той же прямой OO_2 и т. д.

Итакъ, доказано, что центръ шара перемѣщается по прямой OO_x . Но, очевидно, что четырехугольники $OM_1O_1N_1$, $OM_2O_2N_2$, $OM_3O_3N_3$, .. противоположныя стороны которыхъ параллельны, суть параллелограммы, а прямыя OO_1 , OO_2 , OO_3 , .. діагонали ихъ.

Наконецъ, изъ подобия тѣхъ же \triangle \triangle -въ OO_1N_1 и OO_2N_2 находимъ, что $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{ON_1}{ON_2} = \frac{v_2 t_2}{v_1 t_1} = 1$, что пути, прой-

денные точкой O въ слѣдующемъ движеніи, пропорциональны временамъ, изъ чего слѣдуетъ, что это движеніе равномерное. Граничнымъ образомъ теорема параллелограмма перемѣщеній доказана.

§ 19. Параллелограммъ скоростей. Легко доказать теперь, что въ разсматриваемомъ сложномъ движеніи, составленномъ изъ двухъ равномерныхъ движеній, направленныхъ подъ угломъ, скорость по истиннѣ и направленію равна діагонали параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній, какъ на сторонахъ. (Теорема параллелограмма скоростей).

Дѣйствительно, такъ какъ въ равномерномъ движеніи скорость измѣряется путемъ, пройденнымъ въ единицу времени (секунду), то, положивъ $t_1 = 1$, найдемъ, что скорости v_1 и v_2 соответственно

*) $O_1N_1 = OM_1 = v_1 t_1$; $O_2N_2 = OM_2 = v_2 t_2$. Следовательно, пропорцію $\frac{O_1N_1}{O_2N_2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2}$ можно представить въ видѣ очевиднаго равенства $\frac{v_1 t_1}{v_2 t_2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2}$ или $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{v_2}$

изображаются отрезками OM_1 и ON_1 , а составная скорость v сложного движения изображается отрезком OO_1 , т. е. диагональю параллелограмма $OM_1O_1N_1$, стороны которого изображают скорости v_1 и v_2 , что и следовало доказать.

§ 50. **Параллелограмм ускорений.** Точно также не трудно доказать совершенно подобным же образом, что движение, сложное из двух составляющих равноускоренных без начальной скорости движений ^{*)}, есть также движение равноускоренное без начальной скорости и что ускорение его равно по направлению и величине диагонали параллелограмма, построенного на векторах, представляющих движения, как на сторонах. (Теорема параллелограмма ускорений).

Воспользуемся для доказательства предыдущимъ примеромъ, предположивъ только, что какъ движение центра шара по желобу, такъ и движение желоба по полу будутъ равноускоренныя съ ускорениями a_1 и a_2 , но безъ начальной скорости.

Когда центръ O шара (фиг. 14) черезъ t_1 секундъ послѣ начала движения пройдетъ по прямой AB путь $OM_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2}$, въ это же время прямая AB перемѣстится по AC на величину $ON_1 = \frac{a_2 t_1^2}{2}$ и, следовательно, действительное положеніе центра шара будетъ въ точкѣ O_1 . Точно также черезъ t_2 секундъ послѣ начала движения точка O пройдетъ по AB путь $OM_2 = \frac{a_1 t_2^2}{2}$, а въ то же время прямая AC пройдетъ путь $ON_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2}$,

вслѣдствіе чего действительное положеніе центра шара будетъ находиться въ точкѣ O_2 . Соединивъ точки O_1 и O_2 съ точкой O , покажемъ изъ подобія $\triangle A$ -въ OO_1N_1 и OO_2N_2 ^{**)}, что прямыя OO_1 и OO_2 составляютъ одну прямую и что, следовательно,

^{*)} Такъ какъ въ прямолинейныхъ движенияхъ *скорости* и *ускоренія* всегда *сопадаютъ* въ направленіи, то въ дальнѣйшемъ изложеніи мы для краткости не будемъ упоминать о направленіи движенія, а только о направленіи скоростей.

^{**) $\angle N_1 = \angle N_2$ и $\frac{ON_1}{O_1N_1} = \frac{O_1N_1}{O_2N_2}$, такъ какъ эти пропорц. будучи написаны въ видѣ $\frac{1}{2} a_2 t_1^2 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ и $\frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{1}{2} a_1 t_2^2$ представляютъ тождество $\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$.}

сложное абсолютное) перемещение центра шара направлено по диагонали параллелограмма, построенного на составляющих перемещениях, какъ на сторонахъ

$$\text{Изъ подобия гѣхъ-же } \triangle \triangle \text{ъ-въ имѣемъ, что } \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{ON_1}{ON_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2},$$

т. е. что сложное движеніе есть такоо равноускоренное безъ начальной скорости, такъ какъ приведенные пути пропорціональны квадратамъ соответствующихъ временъ. Наконецъ, зная

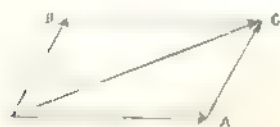
$$t_1 = 1/2 = 1,41 \text{ сек.}, \text{ найдемъ, что } OM_1 = \frac{a_1 (1/2)^2}{2} = a_1 = a$$

$$ON_1 = \frac{a_2 (1/2)^2}{2} = a_2, \text{ а диагональ параллелограмма } OM_1ON_1$$

$$\text{прямая } OO_1 = \frac{a(V\sqrt{2})^2}{2} = a \text{ — ускоренію сложнаго движенія, что}$$

и слѣдовало доказать.

§ 51. Треугольники перемѣщений, скоростей и ускореній. Понятіе о геометрическомъ сложеніи. Слѣдуетъ замѣтить, что для опредѣленія въ сложномъ движеніи перемѣщенія, скорости и ускоренія движущейся точки нѣтъ необходимости строить полныи параллелограммы. Намъ нѣтъ достаточно величины A (фиг. 15)



Фиг. 15.

прямолінейнаго трѣугла OA , изображающаго величину и направленіе перемѣщенія (скорости или ускоренія) точки въ одномъ изъ составляющихъ движеній, провести прямую AC , равную и параллельную прямой OB , изображающей величину и направленіе перемѣщенія (скорости или ускоренія) въ другомъ изъ составляющихъ движеній, и точку C соединить прямою съ точкою O . Прямая OC называется *вызывающей* стороной \triangle -ка OAC , такъ какъ стороны OA и AC въ немъ идутъ по *отному* направленію (теченію), какъ указываютъ стрѣлки, а сторона OC по *встрѣчному* направленію. Замыкающая сторона OC , какъ видно изъ чертежа, есть ничто иное, какъ диагональ параллелограмма $OABC$, а потому, согласно предыдущему, представляеть, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, перемѣщеніе (скорость или ускореніе) въ сложномъ движеніи точки.

Замыкающая сторона OC , какъ видно изъ чертежа, есть ничто иное, какъ диагональ параллелограмма $OABC$, а потому, согласно предыдущему, представляеть, какъ по величинѣ, такъ и по направленію, перемѣщеніе (скорость или ускореніе) въ сложномъ движеніи точки.

Треугольник OAC называется *параллелограммом перемещений (скоростей или ускорений)*.

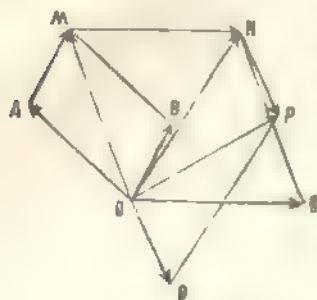
Описанные способы построения параллелограмма или треугольника перемещений, скоростей и ускорения имеют первостепенное значение в механике и называются способами *геометрического сложения*. Диагональ параллелограмма или замыкающая сторона треугольника называются геометрической суммой двух других отрезков, а каждая из незамыкающих сторон (напр. OA) треугольника называется *геометрической разностью* между замыкающей стороной (OC) и другою из незамыкающих сторон (AC).

Очевидно, что геометрическое сложение нельзя смешивать с алгебраическим сложением. Оба сложения дают одинаковые результаты лишь в том случае, если перемещения, скорости или ускорения направлены по *одной прямой*. В этом случае параллелограмм или треугольник обращаются в прямую линию.

§ 32. Многоугольники перемещений, скоростей и ускорения. По-ложимъ, что движущаяся точка одновременно участвует не въ двухъ, а въ нѣсколькихъ равномерныхъ или равноускоренныхъ съ начальной скоростью движенияхъ. Напр., точка O (фиг. 16) въ некоторое время t проходить путь OA и въ то же самое время прямая OA проходить (перемѣщаясь параллельно самой себѣ) путь OB , прямая OB проходить путь OC и прямая OC проходить путь OD . Все эти движения или равномерны (хоть и съ различными скоростями) или равноускоренны, безъ начальной скорости (но съ различными ускорениями). Такимъ образомъ, истинное или абсолютное движение точки O будетъ составное изъ четырехъ движений. Требуется определить истинное перемѣщеніе точки во время t , а также скорость (или ускореніе) сложнаго движенія ея.

Для этого поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Сложивъ по правилу параллелограмма перемѣщенія OA и OB , получимъ составное изъ нихъ перемѣщеніе OM ; сложивъ это съ третьимъ перемѣщеніемъ OC , надемъ перемѣщеніе ON , составное изъ перемѣщений OA , OB и OC ; наконецъ, сложивъ перемѣщеніе ON съ послѣднимъ простымъ перемѣщеніемъ OD , получимъ искомое перемѣщеніе OP сложнаго движенія точки O .

Такъ какъ противоположныя стороны параллелограмма равны и параллельны, то легко замѣтить, что прямую OP , выражающую



Фиг. 16

по величинѣ и направленію перемѣщеніе сложнаго движенія, можно найти еще слѣдующимъ построениемъ. Изъ конца A прямой OA проведемъ прямую AM , равную и параллельную прямой OB , выражающей величину и направленіе второго перемѣщенія; изъ точки M проведемъ прямую MN , равную и параллельную прямой OC третьего перемѣщенія, наконецъ изъ точки N

проведемъ прямую NP , равную и параллельную прямой OD четвертаго перемѣщенія. Соединивъ прямою точки O и P , получимъ искомую прямую OP .

Изъ приведеннаго построения видно, что перемѣщенія составляющихъ движеній вмѣстѣ съ перемѣщеніемъ составнаго движенія образуютъ многоугольникъ $OAMNP$, называемый *многоугольникомъ перемѣщеній*.

То же самое же построение употребляется для графическаго опредѣленія скорости или ускоренія сложнаго движенія, составленнаго изъ нѣсколькихъ равномерныхъ или равноускоренныхъ, безъ начальной скорости движеній. Разница состоитъ только въ томъ, что въ этихъ случаяхъ стороны многоугольника суть прямыя, выражающія по величинѣ и направленію скорости или ускоренія составляющихъ и составнаго движеній. Такие многоугольники называются *многоугольниками скорости и ускоренія*.

Разсматривая многоугольники перемѣщенія скорости и ускоренія, мы замѣчаемъ, что перемѣщеніе, скорость и ускореніе сложнаго движенія образуютъ въ нихъ послѣднюю, или *замыкающую* сторону, называемую такъ потому, что перемѣщенія, скорости и ускоренія простыхъ движеній идутъ по *одному* направленію (или теченію), а перемѣщеніе, скорость и ускореніе сложнаго движенія идетъ по *острѣчному* направленію.

Отсюда понятно, что если при построеніи этихъ многоугольниковъ стороны ихъ, идущія по *одному* теченію, *или* *идущія* по

собой, т.-е. если конецъ послѣдней изъ такихъ сторонъ совпадетъ съ началомъ первой стороны, то

1. въ случаѣ *многоугольника перемѣщений* перемѣщеніе сложнаго движенія равно нулю, т.-е. *точка остается въ покое*;

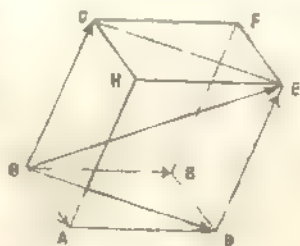
2. въ случаѣ *многоугольника скоростей*: скорость сложнаго движенія равна нулю, т.-е. *точка также остается въ покое*;

3. въ случаѣ *многоугольника ускореній*: ускореніе сложнаго движенія равно нулю, т.-е. *точка или остается въ покое, или движется прямолинейно и равномерно*.

Въ заключеніе замѣтимъ, что при построеніи многоугольника перемѣщений, мы всегда получимъ одну и ту же прямую OP составнаго перемѣщенія, въ какомъ бы порядкѣ мы ни отыскали стороны многоугольника. Видъ многоугольника будетъ другой, но замыкающая сторона его будетъ та же самая прямая OP , что не трудно проверить. Понятно, что это замѣчаніе относится также къ многоугольникамъ скоростей и ускореній.

§ 53. **Параллелепипеды перемѣщений, скоростей и ускореній.** Хотя правило многоугольника перемѣщений представляетъ самое общее правило сложения перемѣщений и одинаково справедливо, каковы бы направленія ихъ лежали въ одной плоскости или въ разныхъ плоскостяхъ, однако для частнаго случая сложения трехъ перемѣщеній, происходящихъ не въ одной плоскости, пользуются еще такъ называемымъ *правиломъ параллелепипеда перемѣщений*.

Предположимъ (фиг. 17), что въ теченіи некотораго времени t точка O проходитъ путь OA , причемъ одновременно съ этимъ движеніемъ прямая OA перемѣщается параллельно самой себѣ на величину OB , а плоскость OAB перемѣщается параллельно самой себѣ на величину OC . Такимъ образомъ точка O одновременно участвуетъ въ трехъ перемѣщеніяхъ OA , OB и OC , не лежащихъ въ одной плоскости. Чтобы найти абсолютное перемѣщеніе ея, сложимъ по правилу параллелограмма перемѣщенія OA и OB и, получивъ составное перемѣщеніе OD , сложимъ его съ третьимъ перемѣщеніемъ OC . Полученное перемѣщеніе OE и будетъ иско-



Фиг. 17

мым абсолютнымъ перемѣщеніемъ точки O . Какъ видно изъ чертежа, перемѣщеніе OE есть ничто иное, какъ *сумма и параллелепипедъ*, ребра котораго суть перемѣщенія составляющихъ движеній. Такой параллелепипедъ называется *параллелепипедомъ перемѣщеній*.

Перемѣщеніе OE можно было бы найти и по правилу многоугольника, проведя изъ конца A перваго перемѣщенія прямую AD , равную и параллельную величинѣ втораго перемѣщенія OB , затѣмъ изъ точки D проведи прямую DE , равную и параллельную прямой OC третьаго перемѣщенія, и наконецъ соединивъ точки O и E прямою OE , которая и будетъ замыкающей стороной косога многоугольника $OADE$. Совершенно такимъ же образомъ при сложении трехъ скоростей и ускореній, лежащихъ въ одной плоскости, получаютъ *параллелепипеды скоростей и ускореній*.

Если составляющія движенія взаимно-перпендикулярны, то параллелепипедъ будетъ прямоугольный. Очень важно замѣтить, что въ этомъ случаѣ *составляющія перемѣщенія* (скорости и ускоренія) будутъ представлять *проекции составнаго перемѣщенія*, (скорости или ускоренія) на три координатныя оси, направленные по ребрамъ параллелепипеда.

§ 54. **Разложеніе перемѣщеній, скоростей и ускореній.** Обратный вопросъ, т. е. *разложить* данное *составнаго* перемѣщенія, а также составной скорости и составнаго ускоренія на составляющія перемѣщенія, скорости и ускоренія представляеть, вообще говоря, неопредѣленную задачу, допускающую безчисленное множество рѣшеній. Поэтому, чтобы получить одно определенное рѣшеніе, необходимо имѣть достаточное число дополнительныхъ данныхъ.

Такъ напр., вопросъ о разложеніи составной скорости на *три* составляющія скорости сводится къ построению параллелограмма скоростей по данной диагонали или треугольника скоростей по данной сторонѣ. Но такъ какъ для построения одного определеннаго треугольника (атакже и параллелограмма) надо знать *три* элемента его, то слѣдовательно, для определеннаго рѣшенія нашего вопроса необходимо имѣть еще двѣ данныя величины: или величины, или направленія составляющихъ скоростей, или величину и направленіе одной изъ нихъ (т. е. двѣ стороны, или два угла треугольника скоростей, или одну сторону и одинъ уголъ его) и т. д.

Чтобы разложить составную скорость на *три* составляющие скорости, не лежащая в одной плоскости, надо построить или параллелепипед скоростей по данной диагонали, или четырехугольник скоростей по данной стороне. Для определенного решения этого вопроса надо иметь еще *три* данные величины. Чаще всего за эти данные принимают направления, образуемые тремя составляющими скоростями с составной скоростью, т. е. три угла, образуемые ребрами параллелепипеда с его диагональю.

Очевидно, что вѣ эти вопросы имѣютъ чисто геометрический характеръ.

§ 55. Аналитическое опредѣленіе скорости сложнаго движенія, составленнаго изъ двухъ движеній. Способъ параллелограмма скоростей даетъ возможность легко опредѣлить вычисленіемъ (т. е. аналитически) величину и направленіе составной скорости V , если известны величины v_1 и v_2 двухъ составляющихъ скоростей и уголъ α между ихъ направленіями.



Фиг. 18

Известно, что, по закону Ойера (фиг. 18) имѣемъ:

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos OBC$$

или такъ какъ $\cos OBC = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$,

$$V^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Углы α_1 и α_2 , образуемые направленіями скоростей v_1 и v_2 со скоростью V , опредѣляются изъ того же \triangle -ка:

$$V : v_1 : v_2 = \sin (180^\circ - \alpha) : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1$$

или

$$V : v_1 : v_2 = \sin \alpha : \sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Если составляющія скорости v_1 и v_2 взаимно перпендикулярны ($\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$), то параллелограммъ обращается въ прямоугольникъ, при чемъ

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}; \quad v_1 = V \cos \alpha, \quad v_2 = V \sin \alpha \quad . \quad . \quad (3)$$

Задача. Опредѣлить V если 1) $\alpha = 0^\circ$; 2) $\alpha = 180^\circ$, 3) $v_1 = v_2$.

Примѣръ. Пароходъ переплываетъ рѣку подъ угломъ $\alpha = 113^\circ$ къ направленію теченія. Собственная скорость парохода $v_1 = 2.4$ м., а скорость теченія

рѣки $v_2 = 0,7$ м. Определить истинную скорость парохода и направление ея къ теченію рѣки.

Истинная скорость

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos \alpha} = \sqrt{2,4^2 + 0,7^2 + 2 \cdot 2,4 \cdot 0,7 \cdot \cos 113^\circ} = \sqrt{6,76 + 0,49 - 3,36 \cdot 0,39} = 2,23 \text{ м.}$$

Величина угла α_2 , образуемаго направлением истинной скорости и скоростью течения рѣки, опредѣлится изъ пропорціи $1 : v_1 = \sin \alpha : \sin \alpha_2$ или $2,23 : 2,4 = \sin 113^\circ : \sin \alpha_2$, откуда $\sin \alpha_2 = \frac{2,4 \cdot \sin 113^\circ}{2,23} = \frac{2,4 \cdot 0,92}{2,23} = 0,9901$ или $\alpha = 82^\circ$ (прибл.).

§ 56. Аналитическое опредѣленіе скорости сложнаго движенія, составленнаго изъ нѣсколькихъ движеній. Положимъ, что точка (*O*)



Фиг. 19.

участвуетъ одновременно въ нѣсколькихъ движеніяхъ, скорости которыхъ $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ не лежатъ въ одной плоскости (фиг. 19).

Чтобы найти скорость сложнаго движенія точки, разложимъ каждую изъ этихъ скоростей по правилу параллелограмма на 3 составляющія по направленію трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей *OX*, *OY* и *OZ* (или, что все равно, спроектируемъ каждую изъ данныхъ скоростей на эти три оси).

Если назовемъ углы, составленные скоростями $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ съ осью *OX* черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, съ осью *OY* черезъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$, съ осью *OZ* черезъ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$, то составляющія скорости

по оси *OX* будутъ $v_1 \cos \alpha_1, v_2 \cos \alpha_2, \dots, v_n \cos \alpha_n$,
 " " *OY* " $v_1 \cos \beta_1, v_2 \cos \beta_2, \dots, v_n \cos \beta_n$,
 " " *OZ* " $v_1 \cos \gamma_1, v_2 \cos \gamma_2, \dots, v_n \cos \gamma_n$.

Сложимъ теперь составляющія скорости, идущія по каждой оси. Называя составныя скорости черезъ u, v и w , получимъ (фиг. 20):

$$\begin{aligned} u &= v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n = \sum^n v \cos \alpha \\ v &= v_1 \cos \beta_1 + v_2 \cos \beta_2 + \dots + v_n \cos \beta_n = \sum^n v \cos \beta \\ w &= v_1 \cos \gamma_1 + v_2 \cos \gamma_2 + \dots + v_n \cos \gamma_n = \sum^n v \cos \gamma. \end{aligned}$$

*) Буква Σ (сигма) часто ставится для сокращеннаго обозначенія суммы членовъ, составленныхъ по одному закону. Значки 1 и n обозначаютъ, что слѣдуетъ взять сумму всѣхъ членовъ отъ 1-го до n -го.

Наконецъ, сложивъ по правилу параллелепипеда составныя скорости v_x , v_y и v_z , получимъ величину искомой скорости сложнаго движенія

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (4)$$

Называя углы, составленные направлениемъ сложной скорости V съ осями OX , OY и OZ , черезъ α , β , γ и замѣтивъ, что скорости v_x , v_y и v_z представляютъ по что иное, какъ проекции на три оси скорости V , будемъ имѣть, что

$$v_x = V \cos \alpha, \quad v_y = V \cos \beta, \quad v_z = V \cos \gamma,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{V}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{V}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{V}. \quad (5)$$

Примечаніе. Если направленія скоростей $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ точки O лежать въ одной плоскости, то вопросъ о нахожденіи скорости сложнаго движенія значительно упрощается. Возьмемъ въ этой плоскости двѣ оси координатъ OX и OY . Назовемъ углы, образуемыя скоростями $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ съ осью OX черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

Если каждую изъ скоростей разложимъ на двѣ составляющія по направленію осей OX и OY слагающія

$$\begin{aligned} \text{по оси } OX & \text{ будутъ } v_1 \cos \alpha_1, \quad v_2 \cos \alpha_2, \quad v_3 \cos \alpha_3, \dots, v_n \cos \alpha_n \\ \text{" " " } OY & \text{ " " " } v_1 \sin \alpha_1, \quad v_2 \sin \alpha_2, \quad v_3 \sin \alpha_3, \dots, v_n \sin \alpha_n \end{aligned}$$

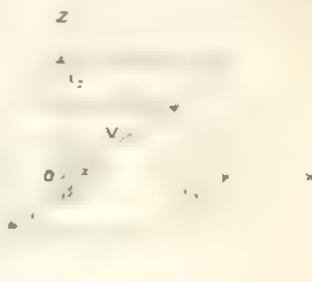
Сложивъ составляющія, идущія по каждой оси, найдемъ двѣ составныя скорости v_x и v_y :

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2 + \dots + v_n \cos \alpha_n = \sum_1^n v \cos \alpha \\ v_y &= v_1 \sin \alpha_1 + v_2 \sin \alpha_2 + \dots + v_n \sin \alpha_n = \sum_1^n v \sin \alpha \end{aligned}$$

Наконецъ сложивъ скорости v_x и v_y , получимъ, что искомая скорость сложнаго движенія $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Уголъ α , образуемый ею съ осью x , опредѣлится изъ равенствъ

$$v_x = V \cos \alpha, \quad v_y = V \sin \alpha \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}.$$



Фиг. 20

Примѣръ. Точка O участвуетъ одновременно въ трехъ равномерныхъ движеніяхъ, происходящихъ въ одной плоскости AOY . Скорости этихъ движеній: $v_1 = 3$ сантим., $v_2 = 5$ см., $v_3 = 6$ см., а углы, образуемые ими съ осью OX : $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_2 = 45^\circ$; $\alpha_3 = 60^\circ$.

Опредѣлимъ скорость сложнаго движенія по величинѣ и направленію

$$v_x = 3 \cos 30^\circ + 5 \cos 45^\circ + 6 \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{6}{2} = 9.12.$$

$$v_y = 3 \sin 30^\circ + 5 \sin 45^\circ + 6 \sin 60^\circ = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{6\sqrt{3}}{2} = 10.22$$

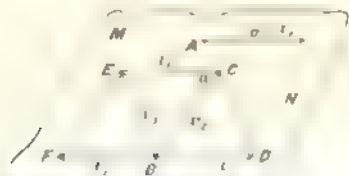
$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{9.12^2 + 10.22^2} = 13.7$$

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10.22}{9.12} = 1.12, \text{ откуда } \alpha = 42^\circ 15' \text{ (широта).}$$

Очевидно, что все сказанное о вычисленіи сложной скорости применимо и къ вычисленію сложнаго ускоренія

§ 57. **Опредѣленіе относительной скорости движенія двухъ точекъ**
На основаніи правилъ сложенія и разложенія скоростей можно

рѣшить слѣдующій интересный вопросъ. Известны скорости v_1 и v_2 двухъ двигающихся точекъ (или двухъ поступательно двигающихся тѣлъ) A и B (фиг. 21). Требуется найти по величинѣ и направленію ихъ относительную скорость (т.-е. скорость точки B относительно точки A или наоборотъ)



Фиг. 21

Разложимъ скорость v_2 точки B на двѣ скорости, изъ которыхъ одна была бы равна скорости v_1 точки A по величинѣ и направленію. Тогда другая слагающая v_2 и будетъ искомою скоростью точки B относительно точки A .

Дѣйствительно, мы всегда можемъ вообразить, что движеніе точки B со скоростью v_2 есть сложное изъ двухъ движеній: одного (переноснаго) со скоростью v_1 той плоскости MN , въ которой лежатъ обѣ точки A и B и другого (относительнаго) со скоростью v_2 по этой плоскости. Очевидно, что только второе движеніе представляетъ движеніе точки B относительно точки A .

Проведемъ изъ точки B прямую BF равную и параллельную скорости v_1 точки A и конецъ F соединимъ съ точкой E . Такъ какъ BF равна и параллельна EC , то и прямая FE также рав

на я параллельна BC , т. е. фигура $BFEC$ есть параллелограммъ и $BE = v_3$ — диагональ его. Итакъ относительная скорость двухъ точекъ по величинѣ и направлению равна диагонали параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ этихъ точекъ, при чемъ одна изъ скоростей откладывается въ обратномъ направленіи.

Если назовемъ уголъ между направлениями скоростей v_1 и v_2 черезъ α , то изъ \triangle -ка BCE получимъ, что относительная скорость $v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos \alpha}$.

Частные случаи. Если направления обѣихъ действительныхъ скоростей точекъ параллельны, т. е. если $\alpha = 0^\circ$ (скорости идутъ по одному направленію) или, если $\alpha = 180^\circ$ (скорости идутъ по противоположнымъ направленіямъ), то въ первомъ случаѣ

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2} = v_1 - v_2,$$

а во второмъ случаѣ

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2} = v_1 + v_2.$$

Примѣръ. 1. Даны относительную скорость двухъ объектовъ относительно другъ друга $v_3 = 40$ верстъ, а также скорости $v_1 = 60$ верстъ и $v_2 = 10$ верстъ, а также уголъ α по одному направленію 1) по противоположнымъ направленіямъ.

Рѣшеніе. а) 20 верстъ, б) 100 верстъ въ часъ.

2. Въ окно вагона, движущагося со скоростью $v_1 = 15$ м., брошенъ камень со скоростью $v_2 = 18$ м. подъ угломъ $\alpha = 60^\circ$ къ движению вагона. Найти направление движения и скорость камня внутри вагона.

Рѣшеніе. Скорость камня внутри вагона $v_3 = \sqrt{15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cos 60^\circ}$

$10,7$ м. Построивъ чертежъ, легко увидимъ, что уголъ, образуемый скоростями v_3 и v_1 равенъ $180^\circ - \alpha$, т. е. уголъ между скоростью v_3 и скоростью v_1 , отложенной въ обратномъ направленіи. Изъ пропорціи $v_2 : v_3 = \sin \alpha : \sin 60^\circ$ находимъ, что $\sin \alpha = \frac{v_3 \sin 60^\circ}{v_2} = \frac{18 \cdot 1,73}{2 \cdot 1,67} = 0,932$, откуда $\alpha = 69^\circ$ (прибл.), а искомая уголъ $180^\circ - \alpha = 111^\circ$ (прибл.).

3. Птица вылетѣвшая изъ куста, которое должно сгнать, съ ея мѣтку пѣтухода, летитъ по горизонтальному пути со скоростью $v_1 = 2$ м., если тогда падаетъ вертикально изъ облака, высота котораго надъ землей = 1000 м.

Рѣшеніе. Очевидно, что наиболее выгодно держать зонтикъ такъ, чтобы ручка его была параллельна направленію теченія и вѣтра дождя. Для этого надо знать скорость и направленіе относительной скорости v_3 дождя.

Уголъ этой скорости α , следовательно, и ручки зонтика съ горизонтомъ $= 89^\circ 10'$ (прибл.).

Криволинейныя движенія.

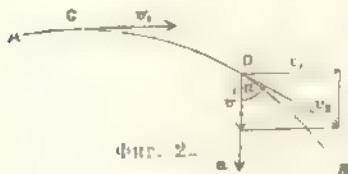
§ 58. Если точка (или тѣло, рассматриваемое какъ точка) движется по ѣкоторой кривой, то такое движеніе называется *криволинейнымъ*. Криволинейное движеніе точки будетъ *равномернымъ*, если въ равные промежутки времени она проходитъ равныя пространства, или *нѣравномернымъ* — въ противномъ случаѣ.

Въ первомъ случаѣ величина скорости точки постоянна, а во второмъ — переменна. Но кромѣ величины скорости во всякомъ криволинейномъ движеніи имѣетъ особое значеніе вопросъ о *направленіи* скорости. Изъ предыдущаго извѣстно, что въ прямолинейныхъ движеніяхъ скорость движущейся точки изображается прямолинейнымъ отрѣзкомъ, длина котораго (въ принятомъ масштабѣ) означаетъ величину, а направленіе опредѣляетъ направленіе скорости, всегда совпадающее съ направлениемъ движенія.

Спрашивается, какое же направленіе слѣдуетъ давать этому отрѣзку въ случаѣ криволинейнаго движенія?

Очевидно, во 1-хъ, что въ этомъ случаѣ направленіе скорости должно измѣняться въ каждой точкѣ пути точно такъ же какъ и направленіе траекторіи, а во 2-хъ, такъ какъ направленіе кривой въ каждой точкѣ опредѣлено, направленіемъ касательной къ ней въ этой точкѣ, то, следовательно, направленіе скорости должно всегда совпадать съ направлениемъ касательной къ траекторіи. Такимъ образомъ во всякомъ криволинейномъ движеніи скорость постоянно измѣняется по направленію, а поэтому измѣненіе скорости или *ускореніе* есть всегда величина *переменная*.

Покажемъ, какъ опредѣляется ускореніе переменнаго криволинейнаго движенія.



Фиг. 22.

§ 59. Ускореніе. Положимъ, что точка описываетъ ѣкоторую криволинейную траекторію AB и въ теченіе весьма малаго промежутка времени Δt перемѣняется изъ точки C , гдѣ скорость ея была v_1 въ точку D , въ которой имѣетъ ѣкоторую другую по

величинѣ и направленію скорость v_2 (фиг. 22). Разложивъ ско-

рость v , по правилу параллелограмма, легко убедимся, что она состоит из прежней скорости v , и из *новой приобретенной* скорости v' . Эта приобретенная скорость v' и представляет собой изменение скорости, происшедшее в элемент времени dt . Разделив величину v' на dt , получим изменение скорости в единицу времени, т. е. *ускорение* движущейся точки в моментъ соответствующий ей положению въ (t^*) , т. е. $a = \frac{v'}{dt}$. Изъ чертежа

видно, что направление ускорения не совпадаетъ съ направлениемъ касательной къ траектории, а обращено внутрь кривой, составляя съ касательной некоторый уголъ α .

§ 60. Разложение ускорения на касательную и нормаль **). Итакъ,

допустимъ, что въ точкѣ C кривой ускорение движущейся точки — a (фиг. 23). Проведемъ въ этой точкѣ касательную и нормаль къ кривой и разложимъ ускорение a на два составляющихъ ускорения по касательной и нормали. Называя черточку ускор. a уголъ между направлениемъ полного ускорения и касательной, находимъ, что ускорение по касательной, называемое *касательнымъ ускорениемъ* a_t , $a \cos \alpha$ ускорение по нормали или *нормальное ускорение* a_n , $a \sin \alpha$.



Фиг. 23.

Очень само собою понятно, что *касательное ускорение*, всегда совпадающее съ направлениемъ скорости точки въ рассматриваемый моментъ, *выражаетъ изменение скорости по величинѣ*, а *нормальное ускорение выражаетъ изменение скорости по направлению*.

*) Строго говоря, величина $a = \frac{v'}{dt}$ представляетъ такъ называемое *среднее ускорение* точки за промежутокъ времени dt , т. е. среднее изъ единицъ времени (§ 35). Чтобы найти *истинное ускорение* въ точкѣ C следовало бы взять предѣлъ среднего ускорения $\frac{v'}{dt}$, при уменьшеніи промежутка времени dt до нуля (§§ 37 и 38). Очевидно, что такое приближенное определение ускорения будетъ тѣмъ ближе къ истинѣ, чѣмъ меньше будетъ элементъ времени dt .

**) Нормалью кривой или поверхности въ данной точкѣ называется перпендикуляръ къ касательной къ этой линіи или поверхности въ той же самой точкѣ.

Принимая это во вниманіе, приходимъ къ слѣдующему раздѣленію движеній въ зависимости отъ ускореній.

Если существуютъ , скорость измѣняется д в и ж е н і е .

- | | | |
|--------------------------------|------------------------|-------------------------|
| 1. Оба ускоренія a_t и a_n | по величинѣ и направл. | перемѣнное криволинейн. |
| 2. Одно касат. ускор. a_t | только по величинѣ | перемѣнное прямолинейн. |
| 3. Одно норм. ускор. a_n | только по направлению | равномерн. криволинейн. |
| 4. Если нѣтъ ускореній | не измѣняется | равномерн. прямолинейн. |

§ 61. Ускореніе равномернаго круговаго движенія. Опредѣлимъ ускореніе точки, движущейся равномерно по окружности. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, существуетъ только одно нормальное ускореніе. Оно направлено всегда по радиусу отъ окружности къ центру, такъ какъ нормаль окружности въ каждой ея точкѣ совпадаетъ съ радиусомъ. Изъ этого ускореніе равномернаго круговаго движенія обыкновенно называютъ *центростремительнымъ ускореніемъ*.

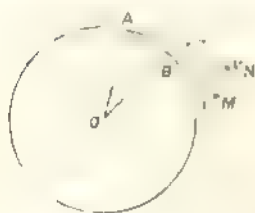
Итакъ положимъ, что въ некоторый очень малый промежутокъ времени Δt точка прошла по окружности радиуса r весьма малую дугу AB съ постоянной (по величинѣ) скоростью v . Такимъ образомъ $AB = v \cdot \Delta t$ откуда

$$r = \frac{AB}{\Delta t} \quad (1)$$

Построивъ треугольникъ скоростей (фиг. 24) BMN , получимъ величину приобретенной скорости $v' = MN$. Изъ подобія равнобедренныхъ \triangle -въ OAB и BMN имѣемъ, что

$$\frac{MN}{AB} = \frac{BM}{OA} \quad \text{откуда} \quad MN = \frac{BM}{OA} \cdot AB \quad \text{или}$$

$$v' = \frac{v}{r} \cdot AB \quad (2)$$



Фиг. 24.

Искомое центростремительное ускорение $a_n = \frac{v'}{t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{AB}{\Delta t}$ или, принимая, по малости дуги AB , величину ее равной хорде AB и подставляя изъ (1) вместо $\frac{AB}{\Delta t}$ ее значение, окончательно получимъ

$$a_n = \frac{v^2}{r} \dots \dots \dots (3) ^*)$$

т. е. центростремительное ускорение равному, кругового движения есть постоянная величина, равная отношению квадрата скорости къ радиусу.

Этой весьма важной величиной дадутъ еще слѣдующее выраженіе. Если время одного полного оборота точки назовемъ черезъ T и замѣтимъ, что $vT = 2\pi r$, откуда $r = \frac{2\pi r}{T}$, то, подставивъ это выраженіе въ (3), найдемъ, что

$$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} r \dots \dots \dots (4)$$

Примѣръ. Найти центростремительное ускореніе точки, которая, двигаясь равномерно по окружности радиуса 6 метр., делаетъ полный оборотъ въ 8 секундъ.

Рѣшеніе. Скорость точки $v = \frac{2\pi \cdot 6}{8} = \frac{3\pi}{2} = 4,71$ м., а ускореніе $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(4,71)^2}{6} = 3,7$ м. Въ теченіе каждой секунды ускореніе точки отъ прямолинейнаго движенія (по касательной къ центру) $\frac{a}{2} = 1,85$ м.

§ 62. Центростремительное ускореніе произвольнаго криволинейнаго движенія. Выраженіе $\frac{v^2}{r}$ величины центростремительнаго ускоренія можно обобщить на случай какова угодно криволинейнаго движенія. Всякую кривую можно считать состоящей изъ дугъ

*) Выраженіе ускоренія $a_n = \frac{v^2}{r}$ совершенно точно, такъ какъ предѣлъ средняго ускоренія $\frac{v'}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{AB}{\Delta t}$ пред. $\left(\frac{AB}{\Delta t} \right)$. Но предѣлъ $\left(\frac{AB}{\Delta t} \right)$ есть, т. е. предѣлъ пройденнаго пространства къ соответствующему промежутку времени есть скорость. Поэтому $a_n = \text{пред.} \left(\frac{v'}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{r}$.

круга, описанных различными радиусами и из различных центров. Эти радиусы для элементов кривой, совпадающих с дугами их кругов, называются *радиусами кривизны*.

Понятно, что кривая будет тѣмъ круче, чѣмъ радиусъ кривизны ея меньше и тѣмъ положе, чѣмъ радиусъ кривизны ея больше. Поэтому за мѣру кривизны (кружности) принимаютъ дробь $\frac{1}{r}$, т.-е. простѣйшую величину, обратно пропорциональную ея радиусу.

Очевидно, что для различныхъ элементарныхъ дугъ всякой другой кривой величина $\frac{1}{r}$ будетъ переменная (фиг. 25). Следова-



Фиг. 25.

тельно можно сказать, что во всякомъ криволинейномъ движеніи центростремительное ускореніе въ данную моментъ времени или, что все равно, въ данной точкѣ пути, равно квадрату скорости въ этотъ моментъ, раздѣленному на соответствующій радиусъ кривизны, т.-е. $a_n = \frac{v^2}{r}$, при чемъ зѣсь величина a_n уже переменная,

зависящая въ равномерномъ движеніи отъ переменной величины v , а въ переменномъ движеніи еще и отъ переменной величины r .

§ 63. Сложение криволинейныхъ перемѣщений производится такъ же, какъ и сложение прямолинейныхъ перемѣщеній по правилу параллелограмма.



Фиг. 26.

Для доказательства предположимъ, что движущаяся точка въ некоторый промежутокъ времени t проходитъ криволинейный путь AB и въ то же время сама траекторія, двигаясь поступательно (т.-е. параллельно самой себѣ) проходитъ криволинейный путь AC (фиг. 26). Если бы траекторія была неподвижна, то, спустя время t , наша точка была бы въ B а если бы точка была неподвижна, а двигалась бы поступательно только траекторія, то точка, спустя то же время, была бы въ C . При одновременномъ существованіи обоихъ движеній наша точка перенедетъ въ D .

т.-е. параллельно самой себѣ) проходитъ криволинейный путь AC (фиг. 26). Если бы траекторія была неподвижна, то, спустя время t , наша точка была бы въ B а если бы точка была неподвижна, а двигалась бы поступательно только траекторія, то точка, спустя то же время, была бы въ C . При одновременномъ существованіи обоихъ движеній наша точка перенедетъ въ D .

Такъ какъ траекторія двигалась поступательно, то, очевидно, что хорда AB параллельна и равна хордѣ CD . Отсюда слѣдуетъ, что и хорда AC параллельна и равна хордѣ BD , т.-е. что четырехугольникъ $ACDB$ есть параллелограммъ и прямая AD діагональ его.

Итакъ, если известны зависимости составляющихъ движеній отъ времени (т.-е. если наприм., известны уравненія составляющихъ движеній), то, строя для отдѣльныхъ моментовъ параллелограммы перемѣщеній (какъ, наприм., построить параллелограммы $AM'N'$), мы будемъ каждый разъ знать положеніе точки въ сложномъ перемѣщеніи, а слѣдовательно можемъ начертить и траекторію сложнаго перемѣщенія, которая, вообще говоря, будетъ нѣкоторой кривая.

Очевидно, что все сказанное легко обобщить на случаи двухъ и болѣе перемѣщеній, т.-е. доказать теорему о многотугольныхъ криволинейныхъ перемѣщеніяхъ.

Сложеніе скоростей и ускореній криволинейныхъ движеній, понятно, производится по тѣмъ же правиламъ, какъ и въ случаѣ прямолинейныхъ движеній.

§ 64. Общий случай сложения равномерныхъ и равно-перемѣнныхъ движеній. Въ предыдущемъ было найдено, что всякое движеніе, составное изъ *прямыхъ* движеній равномерныхъ или равноускоренныхъ безъ начальной скорости будетъ также *прямолинейнымъ*.

Положимъ теперь, что всякое движеніе, составленное изъ *прямыхъ*, но разнородныхъ движеній, направленныхъ другъ къ другу подъ угломъ, будетъ, вообще говоря, *криволинейнымъ*. Сюда отнесены движенія, составленные изъ равноускоренныхъ движеній съ начальными скоростями, изъ равнозамедленныхъ движеній, изъ равномерныхъ и равноускоренныхъ безъ начальной скорости или съ начальной скоростью движеній и вообще движенія, составленные изъ совокупности различныхъ равномерныхъ, равноускоренныхъ и равнозамедленныхъ движеній.

Замѣтимъ прежде всего, что всѣ подобныя движенія могутъ быть сведены къ одному общему случаю, а именно, къ сложению двухъ движеній: одного равномернаго и другого равноускореннаго безъ начальной скорости.

Дѣйствительно, всякое равноускоренное движеніе вида $v_0 t + \frac{at^2}{2}$ можно разсматривать, какъ состоящее изъ двухъ дви-

жений, идущих по одному направлению, т.-е. из равномерного со скоростью v_0 и равноускоренного без начальной скорости съ ускореніемъ a . Точно также всякое равнозамедленное движение

вида $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ можно считать состоящимъ изъ двухъ противо-

положно направленныхъ движений: равномерного со скоростью v_0 и равноускоренного безъ начальной скорости съ ускореніемъ a .

Поэтому, если точка имѣетъ 2 равноускоренныхъ движения вида

$s' = v_0' t + \frac{a't^2}{2}$ и $s'' = v_0'' t + \frac{a''t^2}{2}$, то составное движение ея

можно разсматривать, какъ состоящее изъ одного равномернаго, скорость котораго есть составная изъ начальныхъ скоростей v_0' и v_0'' и одного равноускореннаго безъ начальной скорости, ускореніе котораго есть составное изъ ускореній a' и a'' .

Весьма понятно, что подобнымъ же образомъ можно разсматривать движение, составленное изъ двухъ равнозамедленныхъ движений или изъ движений равномернаго и равноускореннаго съ начальной скоростью и т. д. Очевидно также, что сложение не только двухъ, но и трехъ и болѣе движений равномерныхъ, равноускоренныхъ и равнозамедленныхъ тоже сводится къ сложению двухъ движений: *равномернаго*, скорость котораго есть составная изъ всѣхъ начальныхъ скоростей *равнозамедленныхъ* и *равноускореннаго* безъ начальной скорости, ускореніе котораго есть составное изъ всѣхъ ускореній.

Такимъ образомъ случай сложения двухъ движений: равномернаго и равноускореннаго безъ начальной скорости отличается большою общностью. Разсмотримъ его подробно, предположивъ что эти два движения направлены другъ къ другу подъ прямымъ угломъ. Эта задача имѣетъ и практическое значеніе, а именно представляетъ движение тяжелой точки или тѣла разсматриваемаго какъ точка, брошенныхъ параллельно горизонту. Такъ какъ при рѣшеніи этой задачи не будемъ принимать во вниманіе сопротивленіе воздуха, то слѣдовательно, будемъ предполагать, что движеніе происходитъ въ безвоздушномъ пространствѣ.

§ 65. Движеніе тяжелой точки, брошенной параллельно горизонту. Положимъ, что тяжелая точка (или тѣло) M была брошена параллельно горизонту съ начальной скоростью v_0 .

Если бы на эту точку не действовали затѣмъ никакія силы, то, какъ увидимъ впоследствии она должна была бы все время двигаться по данному направлению прямолинейно и равномерно со скоростью v_0 . Но такъ какъ эта точка *тяжелая* (т.-е. на нее дѣйствуетъ сила тяжести), то она должна еще *пасть*, т.-е. двигаться по вертикали внизъ равноускоренно съ ускореніемъ $g = 9,8 \text{ м.}$ Итакъ точка M имѣетъ два движенія: равномерное по горизонтали со скоростью v_0 и равноускоренное безъ начальной скорости съ ускореніемъ g по вертикали (фиг. 27).



Уравненіе перваго движенія:

$$x = v_0 t. \quad (1)$$

а второго:

$$y = \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Построивъ параллелограммы (прямоугольники) перемѣщеній, найдемъ, что точка въ концѣ 1-й, 2-й, 3-й секунды будетъ по слѣдовательно находиться въ A, B, C ..

Исключимъ изъ уравненій (1) и (2) величину t . Такъ какъ

$$t = \frac{x}{v_0}, \text{ то } y = \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (3)$$

Уравненіе (3), представляющее зависимость между координатами движущейся точки, выражаетъ, очевидно, не что иное какъ *траекторию* разсматриваемаго составнаго движенія. По виду этого уравненія заключаемъ, что траекторія точки есть *парабола*, у которой вершина въ M , а ось совпадаетъ съ вертикалью y .

Итакъ движеніе составное изъ двухъ прямолинейныхъ движеній: равномернаго и равноускореннаго безъ начальной скорости, есть *криволинейное* и именно *параболическое*, что и слѣдовало доказать.⁴⁾

⁴⁾ Если бы оба составляющія движенія были направлены не подъ прямымъ и не подъ какимъ угодно острымъ или тупымъ угломъ, то составное или истинное движеніе точки также было бы параболическое. Этотъ болѣе сложный примѣръ мы разсмотримъ впоследствии.

Скорость этого составного движѣнія въ концѣ промежутка времени t выражается по направленію и величинѣ діагональю параллелограмма (здѣсь прямоугольника), построеннаго на составляющихъ скоростяхъ $v_x = v_0$ и $v_y = gt$. Поэтому истинная скорость точки $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ или $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$.

Примѣръ. Камень брошенъ горизонтально съ высоты $h = 50$ м. и съ начальной скоростью $v_0 = 20$ м. Найти. 1) черезъ какое время онъ коснется земли; 2) на какомъ разстояніи, считая по горизонтальной и 3) какаѣ будетъ его скорость въ этотъ моментъ.

Изъ формулы $h = \frac{gt^2}{2}$ находимъ $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{100}{9.8}} = 3,2$ сек. Такъ какъ $x = v_0 t$, то искомое горизонтальное разстояніе $= 20 \cdot 3,2 = 64$ м. Наконецъ изъ формулы $v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$ получимъ, что скорость камня въ моментъ паденія его на землю $= \sqrt{20^2 + 9,8^2 \cdot 3,2^2} = 37,2$ м.

Вращательное движеніе твердаго тѣла вокругъ оси.

§ 66. Вращательнымъ движеніемъ твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси называется движеніе, въ которомъ точки тѣла описываютъ около некоторой неподвижной прямой, называемой *осью вращенія*, параллельныя окружности въ плоскостяхъ перпендикулярныхъ къ этой оси.

Если тѣло, какъ каждыи свой полный оборотъ, такъ и каждую одинаковую часть полнаго оборота совершаетъ въ соответственно одинаковыя времена, то такое вращеніе называется *равномернымъ*.

Иначе говоря, если во вращающемся тѣлѣ какая-либо точка (то, напр. A , въ равные промежутки времени описываетъ равныя дуги, причемъ, очевидно, что и всѣ другія точки описываютъ въ эти промежутки времени также соответственно равныя дуги, то такое движеніе есть *равномерное*; въ противномъ же случаѣ *неравномерное*.

Прямѣюмъ равномернаго вращательнаго движѣнія можно служить вращеніе земли совершающей въ каждыя 24 часа одинъ полный оборотъ вокругъ своей оси.

Такъ какъ разстоянія $A_1 O_1$, $A_2 O_2$, $A_3 O_3$... точекъ A_1 , A_2 , A_3 ... (фиг. 28) отъ оси суть выѣтъ съ тѣмъ и радиусы описыва-

ваемых этими точками окружностей или дугъ, то, очевидно, что более удаленныя отъ оси точки тѣла движутся быстрее, чѣмъ точки болѣе близки къ ней, центральныя же углы, описываемыя радиусами $A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3 \dots$ въ одинаковые промежутки времени, равны между собою.

§ 67. Скорость равномерно-вращающагося тѣла обыкновенно измѣряется числомъ его оборотовъ (или частей одного полного оборота) въ единицу времени, чаще всего *въ одну минуту*.

По данному числу n оборотовъ тѣла въ 1 минуту легко найти скорость любой точки тѣла, т. е. путь, проходимый ею въ 1 секунду, если только извѣстно расстояние r этой точки отъ оси вращенія.

Дѣйствительно, путь, проходимый точкою за одинъ оборотъ — $2\pi r$, следовательно въ 1 минуту или за n оборотовъ пройденный путь $2\pi r n$, а въ одну секунду $\frac{2\pi r n}{60}$

Итакъ,

$$v = \frac{2\pi r n}{60} \dots \dots \dots (1)$$

Примѣръ. Маховое колесо радиусомъ въ 2 метра дѣлаетъ 40 оборотовъ въ минуту какова скорость на окружности маховика (Скорость на окружности колеса, шкивовъ и пр. называется *окружной скоростью*).

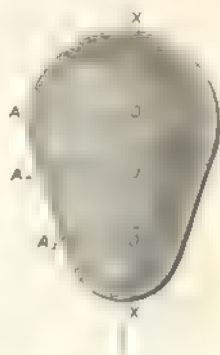
Отвѣтъ.

$$v = \frac{2\pi r n}{60} = \frac{2,3,14 \cdot 2,40}{60} = 8,37 \text{ м. въ 1"}$$

Очевидно, что если время одного полного оборота тѣла равно T , то скорость точки, находящейся на разстоянн r отъ оси опредѣляется формулой

$$v = \frac{2\pi r}{T} \dots \dots \dots (2)$$

§ 68. Угловая скорость. Такъ какъ точки, находящіяся въ различныхъ разстояннхъ отъ оси, имѣютъ различныя скорости, то для вращательнаго движенія принята еще особая мѣра скорости вращенія, а именно *угловая скорость*.



Фиг. 28

Угловой скоростью называется скорость точки, находящейся отъ оси въ разстояніи равномъ единицѣ длины (1-му сантиметру, 1 метру, 1 футу и пр.).

Обозначивъ угловую скорость буквой ω , а скорость некоторой произвольной точки, находящейся въ разстояніи r отъ оси чертой v , будемъ имѣть для времени одного оборота

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{или} \quad \omega \cdot r = 1 : T, \quad \text{откуда} \quad v = \omega r. \quad (3)$$

т.е. *скорость любой точки тела равна угловой скорости, умноженной на радиусъ вращенія.*

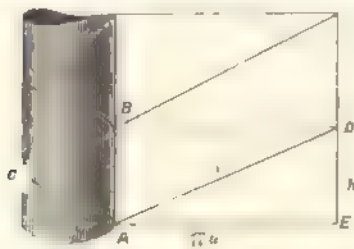
§ 69. Переменное вращательное движение. Въ переменномъ вращательномъ движеніи угловая (а следовательно, и всякая другая) скорость измѣняется въ каждый моментъ времени. Измѣненіе угловой скорости въ единицу времени называется *угловымъ ускореніемъ* и обозначается буквой α .

Разсуждая также, какъ и ранѣе при изученіи прямолинейныхъ движеній, не трудно вывести уравненія угловой скорости и пройденнаго пространства для равноускореннаго и равнозамедленнаго вращательнаго движенія. Эти уравненія

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (4) \quad \text{и} \quad S = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2} \quad (5)$$

только буквами различаются отъ ранѣе выведенныхъ уравненій, что и понятно, такъ какъ ходъ разсужденія остался тотъ же самый.

§ 70. Винтовое движеніе. Если тѣло имѣть одновременно два движенія: поступательное и вращательное около некоторой оси,



Фиг. 29.

то истинное или составное движеніе его будетъ *винтовымъ*. Если направленіе поступательнаго движенія параллельно оси (фиг. 29), то точки тѣла будутъ двигаться по *цилиндрическимъ* поверхностямъ, описаннымъ около этой оси радиусами равными разстояніямъ точекъ отъ оси. Описываемыя при

этомъ точками тѣла траекторіи называются *винтовыми линиями*. Высота AB поступанія тѣла за одинъ полный оборотъ называется

шагом или *верши* винтовой линии (или витка), а длина всего пути ACB , приведенного при этом к некоторой произвольной точке тѣла, называется *длиной витка*.

Развернув цилиндрическую поверхность въ плоскость, увидимъ, что длина витка AD представляетъ гипотенузу прямоугольнаго Δ -ка, катеты котораго суть: высота тѣла $DE = h$ и длина окружности основания цилиндра $AE = 2\pi r$, такъ, что $s = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}$.

Скорость описаннаго винтового движенія, какъ составная изъ скоростей v_1 и $v_2 = \omega r$ поступательнаго и вращательнаго движеній, направленныхъ подъ прямымъ угломъ, очевидно $= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ или

$$v = \sqrt{v_1^2 + \omega^2 r^2} \dots \dots (6).$$



Фиг. 30.

Если поступательное движеніе тѣла направлено по прямой, наклонной къ оси вращения (фиг. 30), то винтовое движеніе будетъ происходить по конической поверхности. Траекторіи точекъ тѣла въ этомъ случаѣ называются *линиями бурава*.

Введеніе въ статику и динамику.

§ 71. Въ кинематикѣ мы разсматривали движеніе съ чисто математической точки зрѣнія, не обращая никакого вниманія на причины этого движенія, т.е. на силы. Такое изученіе движенія, какъ *физическаго явленія*, страдало весьма понятной неполнотою и односторонностію: въ механикѣ мы имѣемъ дѣло не съ геометрическимъ, а съ материальнымъ тѣломъ, поэтому мы необходимо должны принимать во вниманіе не только величину и форму тѣла, но также и то, что оно состоитъ изъ *вещества* или *матеріи*, такъ какъ въ свойствахъ ея заключаются причины движенія или покоя.

Такимъ образомъ изученіе движенія и покоя тѣлъ не можетъ основываться на одномъ отвлеченномъ математическомъ разсужденіи, но необходимо нуждается въ чисто физическихъ основаніяхъ, открытых путемъ наблюденія и размышленія надъ явлениями природы.

Такихъ основныхъ началъ или, какъ ихъ чаще называютъ, *основныхъ законовъ механики* три:

1. **Законъ инерціи** *Всякое тѣло стремится сохранить свое состояніе покоя или движенія и не можетъ само по себѣ измѣнить его.*

2. **Законъ независимости дѣйствія силъ.** *Всякая сила, приложенная къ тѣлу, всегда стремится двигать его съ нѣкоторымъ вполне определеннымъ ускореніемъ, независящимъ ни отъ состоянія тѣла, ни отъ дѣйствія на него другихъ силъ.*

3. **Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія.** *Если одно тѣло дѣйствуетъ на другое съ нѣкоторой силою, то въ то же самое время второе тѣло дѣйствуетъ на первое съ такою же точно силою, но дѣйствующею въ обратномъ направленіи.*

Первые два закона были открыты Галилеемъ *), а послѣдній — Ньютономъ.

*) Нѣкоторые авторы неправильно приписываютъ открытіе закона инерціи Кеплеру.

Эти три закона, несмотря на то, что они не имѣютъ очевидности математическихъ аксіомъ и не могутъ быть непосредственно доказаны, тѣмъ не менѣе представляютъ основанія науки о природѣ. Открытіе ихъ составило новую эпоху въ исторіи науки и было ближайшею причиною множества другихъ великихъ завоеваній въ области знаній. Справедливость этихъ основныхъ законовъ доказывается тѣмъ, что до сихъ поръ всѣ выведенныя изъ нихъ слѣдствія блестяще оправдались и, наоборотъ, не наблюдалось ни одного явленія, которое бы имъ противорѣчало.

Однако, прежде чѣмъ перейти къ ближайшему разсмотрѣнію законовъ механики, необходимо уяснить и расширить наши понятія о силахъ, какъ причинахъ движенія.

§ 72 О силахъ. Какъ уже мы знаемъ (§ 2), силы происходятъ отъ взаимнаго дѣйствія или одного тѣла на другое, или однихъ частицъ тѣла на другія его частицы. О величинѣ силы мы судимъ по дѣйствию, производимому ею на матеріальное тѣло. Это дѣйствіе можетъ быть двоякаго рода: оно можетъ заключаться въ *движеніи*, а также въ *измѣненіи движенія* тѣла или, если движеніе не можетъ произойти вслѣдствіе препятствій, то въ *давленіи на тѣло*. Силы, которыя, при одинаковыхъ условіяхъ дѣйствуя на одно и то же тѣло, сообщаютъ ему одинаковыя движенія или производятъ на него одинаковыя давленія, считаются *равными*.

Силы, во-первыхъ, раздѣляются на *движущія силы*, т.-е. такія, которыя производятъ или стремятся произвести движеніе, и на *сопротивленія*, т.-е. на силы препятствующія движенію, каковы напр., сдвигленіе частицъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ сила тяжести и проч. Сюда относятся и такъ называемыя *вредныя сопротивленія*, треніе и сопротивленіе среды (воздуха, жидкости), окружающей тѣло.

По отношенію ко времени дѣйствія различаютъ силы *непрерывныя*, дѣйствующія въ теченіи всего разсматриваемаго промежутка времени (какова напр., сила тяжести), и *мгновенныя*, дѣйствующія въ теченіи весьма короткаго элемента времени (напр., силы взрывовъ газовъ, удары и проч.).

Наконецъ, въ зависимости отъ постоянства дѣйствія, силы называютъ *постоянными*, если величина и направленіе ихъ не измѣняется съ теченіемъ времени и *переменными* въ противномъ случаѣ.

Строго говоря, мы не знаемъ вполнѣ постоянныхъ силъ. Мускульная сила живыхъ существъ, сила упругости газовъ, сила вѣтра, силы магнитныя и электрическія все это переменныя силы. Одна изъ наиболѣе постоянныхъ силъ, а именно сила тяжести, выражающаяся вѣсомъ тѣлъ, въ сущности есть также переменная сила, такъ какъ уменьшается при удаленіи тѣла отъ поверхности земли. Тѣмъ не менѣе мы условимся называть постоянными тѣ силы, которыя не измѣняютъ чувствительно своей величины и своего направленія *въ теченіи разсчитываемыхъ промежутковъ времени*. Съ этой точки зрѣнія сила тяжести мы будемъ разсматривать какъ постоянную силу.

§ 73. Единицы силы. Простейшимъ, ежедневно наблюдаемымъ нами случаемъ силы есть *вѣсъ* тѣлъ, представляющій силу и много притяженія, стремящуюся приблизить всѣ тѣла къ центру земли. Поэтому мѣрами или единицами силы, черезъ сравненіе съ которыми можно было бы измѣрять какія угодно силы, въ механикѣ принимаютъ обыкновенно извѣстныя единицы или мѣры *вѣса* — килограммъ (вѣсъ 1 куб. дециметра воды при 4°) ... 2,5 фунта ... $= \frac{1}{16}$ пуда; *граммъ* (вѣсъ 1 куб. сантиметра воды) $= \frac{1}{4}$ золотника; *либъ* (вѣсъ 1000 куб. децим. воды) фунтъ (вѣсъ 25 децим. воды) и пр. *).

§ 73. Динамометры. Для измѣренія силъ существуютъ особые приборы, называемые динамометрами. Существуетъ довольно много динамометровъ различнаго устройства.



Фиг. 31.

Динамометръ, изображенный на (фиг. 31) представляетъ согнутую упругую стальную пластинку *AB*. Въ верхней вѣтви ея *A* укрѣплена металлическая дуга *m*, другой конецъ которой свободно проходитъ черезъ отверстіе въ нижней вѣтви *B* и оканчивается крючкомъ для подвѣсыванія грузовъ. Рядомъ съ этой дугой имѣется другая дуга *n*, укрѣпленная въ нижней вѣтви и свободно проходящая черезъ отверстіе въ ней.

* Въ дальнѣйшемъ мы разсмотримъ еще такъ называемую *абсолютную единицу силъ*, употребляемую въ точныхъ научныхъ расчетахъ.

ней вѣтви, гдѣ она кончается кольцомъ для подвѣшиванія самого динамометра. При дѣйствіи силы на крюкъ, пластинка сжимается, причемъ верхній конецъ дуги и выходитъ наружу.

По дѣленіямъ этой дуги, нанесеннымъ путемъ опытовъ подвѣшиванія грузовъ при изготовленіи динамометра, опредѣляется величина силы.

Другой примѣръ динамометра представляетъ обыкновенный пружинный безмѣръ (фиг. 32), устройство котораго ясно видно изъ чертежа.

§ 74. Изображеніе силы. Графически силу условно изображаютъ въ видѣ прямолинейнаго отрѣзка, причемъ:

1. одинъ изъ концовъ ея находится въ точкѣ приложенія силы;

2. направленіе отрѣзка совпадаетъ съ направленіемъ силы, т. е. съ тѣмъ направленіемъ, по которому сила двигается или стремится двигаться;—ло, при этомъ сторона направленія указывается стрѣлкой;

3. величина отрѣзка должна соответствовать величинѣ силы. Для этого, принимая напр., что длина 1 сантим. соответствуетъ силѣ въ 1 килограммъ, или длина 1 дюйма соответствуетъ силѣ въ 1 пудъ, наносить въ томъ масштабѣ на начерченномъ отрѣзкѣ величину силы, считая началомъ точку ея приложенія.

Такимъ образомъ (фиг. 33) отрѣзокъ OF даетъ ясное изображеніе силы въ 2,5 киллогр., приложенной къ точкѣ O и дѣйствующей вправо въ указанномъ направленіи.



Фиг. 32.



Фиг. 33.

Основные законы механики.

§ 75. Законъ инерціи. *Всякое тѣло, находящееся въ покое или въ движеніи, стремится сохранить свое состояніе и не мо-*

* Латинское слово *inertia* (inertus) вполнѣ точно переводится русскимъ словомъ *лѣнность*.

жеть само по себѣ, безъ дѣйствія вѣншихъ силъ перейти въ движеніе, если оно было въ покоѣ или какъ нибудь измѣнить свое движеніе (по величинѣ или направленію скорости), если оно двигалось.

Отсюда слѣдуетъ, что пока на тѣло не дѣйствуютъ силы, оно или находится въ покоѣ, или движется прямолинейно и равномерно.

Такимъ образомъ законъ инерціи состоитъ изъ двухъ частей: первая изъ нихъ относится къ покою, а вторая къ движенію тѣлъ.

Первая часть закона очевидна сама по себѣ; вторая не только не очевидна, но и не можетъ быть доказана прямымъ опытомъ. Наоборотъ, наши ежедневные наблюденія и опыты какъ бы противорѣчатъ этому закону.

Такъ напр., мы видимъ, что всякое тѣло, движущееся по горизонтальной плоскости, постепенно уменьшаетъ свою скорость и наконецъ останавливается. Итакъ, какъ будто бы выходитъ, что тѣло само собой измѣняетъ свою скорость и изъ состоянія движенія переходитъ въ состояніе покоя. Если, однако, ближе вѣзмотримъ и задумаемся въ это явленіе, то придемъ къ заключенію, что здѣсь нѣтъ никакого нарушенія закона инерціи. Замедленіе движенія и наконецъ остановка тѣла происходятъ только оттого, что на тѣло дѣйствуютъ двѣ вѣншія силы въ сторону противоположную движенію, а именно *треніе тѣла о поверхность*, по которой оно движется, и *сопротивленіе воздуха*, разѣбаемаго тѣломъ. Устранивъ эти оба сопротивленія, мы имѣли бы движеніе вѣчное, прямолинейное и равномерное, какъ этого требуетъ законъ инерціи.

Справедливость этого доказывается въ нѣкоторой степени примѣромъ движенія небесныхъ тѣлъ *).

Закономъ инерціи объясняются очень многія интересные явленія. Человѣкъ, сидящій въ экипажѣ, вагонѣ, лодкѣ, откидывается назадъ при началѣ движенія и впередъ при внезапной остановкѣ движенія, такъ какъ въ первомъ случаѣ его тѣло стремится со-

*) Кривотинейность движенія планетъ объясняется тѣмъ, что кромѣ инерціи на нихъ дѣйствуютъ еще вѣншія силы, изъ которыхъ самая значительная притяженіе къ солнцу, а затѣмъ притяженія другихъ планетъ.

хранить состояніе покоя, а во второмъ случаѣ состояніе движенія.

Выскакивая изъ движущагося экипажа, путешественникъ обладаетъ по инерціи скоростью экипажа, съ которымъ онъ составлялъ какъ бы одно цѣлое, и, не принявъ этого во вниманіе, можетъ легко упасть, такъ какъ эта скорость сложится по правилу параллелограмма со скоростью его скачка и движеніе произойдетъ въ ту сторону, въ которую онъ не рассчитывалъ соскочить.

Точно также всякому извѣстно, что, разбѣжавшись, трудно вдругъ остановиться и т. д.

Инерція есть внутреннее свойство матеріи или вещества. Тѣло обладаетъ тѣмъ большей инерціей, чѣмъ болѣе въ немъ содержится вещества. Извѣстно, что тѣло болѣе тяжелое не такъ скоро прекращаетъ начавшееся движеніе, какъ тѣло болѣе легкое при тѣхъ же самыхъ условіяхъ.

Поэтому законъ инерціи можетъ быть высказанъ еще въ такой формѣ: *матерія сама по себѣ не можетъ изменить своего состоянія* *).

§ 76. Законъ независимости дѣйствія силъ. *Вѣдная сила, приложенная къ тѣлу, оказываетъ на него такое же дѣйствіе, независимо отъ того, находится ли тѣло въ покое или въ движеніи, а также, существуютъ ли на него еще и другія силы или нѣтъ.*

Этотъ законъ, какъ и законъ инерціи, состоитъ изъ двухъ частей. Въ первой части говорится о независимости дѣйствія силы отъ состоянія тѣла, во второй — о независимости дѣйствія одной силы отъ дѣйствія другихъ силъ, также приложенныхъ къ тѣлу.

Разсмотримъ сначала первую часть закона. Дѣйствіе некоторой определенной силы на данное тѣло, находящееся въ покое, очевидно, состоитъ въ томъ, что она приводитъ его въ некоторое вполне определенное движеніе **) или, что все равно, *сдвигаетъ*

*) Запомнимъ, что съ точки зрѣнія теоретической механики состояніе *тѣла* характеризуется исключительно его скоростью. Такимъ образомъ покой есть такое состояніе тѣла, въ которомъ скорость его равна нулю.

**) Необходимо имѣть въ виду, что здѣсь разумѣются совершенно свободныя тѣла, которыя могутъ безпрепятственно перемѣщаться по любому направленію. Если же тѣло не свободно, то сопротивленія его движенію разсматриваются тоже какъ силы. Эти сопротивленія могутъ измѣнять и даже уничтожить дви-

ему некоторым определенное ускорение (такъ какъ всякое движеніе вполне характеризуется своимъ ускореніемъ).

Дѣйствіе той же силы на то же самое тѣло, но уже находящееся въ некоторомъ движеніи, очевидно состоитъ въ опредѣленномъ измѣненіи этого движенія, т-е. въ измѣненіи его скорости по величинѣ и направленію или, иными словами, въ сообщеніи ему некотораго опредѣленного ускоренія.

По второму закону ускореніе, сообщаемое силой движущемуся тѣлу, совершенно одинаково съ ускореніемъ, сообщаемымъ ею этому тѣлу въ покой.

Откуда непосредственно вытекаетъ такое заключеніе: такъ какъ дѣйствіе силы на тѣло сводится исключительно къ производимому ею ускоренію, то, слѣдовательно, *направленіе силы есть вмѣстѣ съ тѣмъ и направленіе ея ускоренія.*

Все сказанное вполне подтверждается слѣдующимъ примѣромъ. Дѣйствіе силы тяжести на свободное тѣло, находящееся въ покой или въ какомъ угодно движеніи, всегда одинаково: она сообщаетъ тѣлу всегда одно и то же ускореніе $g = 9.8$ м., направленное внизъ по вертикали.

Вторая часть разсматриваемаго закона можетъ быть выражена такъ: *если на тѣло действуют не одна, а нѣсколько силъ, то каждая изъ нихъ сообщаетъ ему такое же точно ускореніе, какъ если бы она дѣйствовала одна.*

Очевидно, что въ слѣдствіе этого тѣло получитъ сложное движеніе, ускореніе котораго будетъ составнымъ изъ всѣхъ ускореній, сообщаемыхъ ему отдельными силами.

На этомъ замѣчательномъ началѣ основаны правила сложения силъ, совершенно одинаковыя съ правилами сложения скоростей и ускореній.

Женѣ сообщаемое приложенной силой тѣло не можетъ двигаться только изъ-за тѣхъ причинъ на тѣло. Всякое тѣло находится на нѣкоторой плоскости, представляющей препятствіе къ своему движенію по плоскости, и испытываетъ треніе и сопротивленіе окружающей среды. Эти сопротивленія (въ особенности первое) часто могутъ быть такъ велики, что приложенной силы хватитъ только для приведенія тѣла въ движеніе, этимъ объясняется, почему напр., мы можемъ только съ нѣкоторымъ трудомъ ввести въ движеніе свободно висѣщую и колеблющуюся и не можемъ сдвинуть его съ мѣста всей рукой, хотя онъ стоитъ на землѣ.

Примѣръ: 1. Дѣйствіе силы, двигающей шаръ и колобу съ нѣкоторымъ ускореніемъ a , не зависить отъ дѣйствія другой силы, двигающей шаръ вмѣстѣ съ колобомъ съ другимъ ускореніемъ a_2 .

2. Положимъ, что шаръ катится съ какою нибудь скоростью по горизонтальной доскѣ, отстоящей отъ земли на 16 футовъ.

Когда шаръ достигнетъ края доски, то онъ, описавъ кривую *), упадетъ на землю, какъ оказывается, въ точно такое же время, какъ будто онъ свободно падаетъ по вертикали, будучи пущенъ съ начальной скоростью съ той же высоты 16 футовъ, т. е.

$$\text{время } t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{32,2}} = \text{почти въ 1 секунду.}$$

3. Камень, свободно падающій съ вершины мачты движущагося корабля, всегда падаетъ у подножія мачты.

§ 77 **Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія.** Если одно тѣло оказываетъ на другое (или если одна частица тѣла действуетъ на другую) съ некоторою силою то съ тою же самою силою второе тѣло оказываетъ на первое съ такою же точно силою, но направленною въ противоположную направленность. Иными словами: если первое тѣло притягиваетъ или отталкиваетъ второе тѣло, то второе тѣло съ такою же силою притягиваетъ или отталкиваетъ первое тѣло.

Этотъ законъ обнаруживаетъ симметричность тѣлъ или частицъ дѣйствія тѣлъ или частицъ другъ на друга взаимны, такъ какъ они всегда равны и прямопротивоположны.

Тѣла (или частицы) могутъ дѣйствовать другъ на друга тремя способами непосредственно, посредствомъ, при помощи другихъ промежуточныхъ или передаточныхъ тѣлъ (веревки, ремня, пружины и проч.), и на расстоянии, какъ напр., земное притяженіе, магнитныя и электрическія силы. Въ послѣднемъ случаѣ также предполагается существованіе особой невидимой передаточной среды, такъ что выраженіе *дѣйствіе на расстоянии** употребляется какъ для сокращенія рѣчи, такъ и въслѣдствіе недостаточности нашихъ знаній о свойствахъ этой среды.

Законъ равенства дѣйствія и противодѣйствія простирается на всѣ случаи дѣйствія одного тѣла на другое или одной частицы на другую.

* Въ безвоздушномъ пространствѣ шаръ падаетъ

Примеры: 1. Если мы давимъ рукой на столъ, то и обратно столъ давить на нашу руку съ такою же точно силой.

2 Когда мы тащимъ съ переменной силой при помощи веревки какой-нибудь грузъ, то онъ обратно тянетъ нашу руку во всякомъ моментъ съ силой, равной нашей силѣ.

3. Съ какой силой магнитъ притягиваетъ къ себѣ кусокъ железа, съ такою же точно силой этотъ кусокъ железа притягиваетъ къ себѣ магнитъ.

§ 78. Различіе движеній въ зависимости отъ силъ. Положимъ, что на находившееся въ покоѣ свободное тѣло, рассматриваемое какъ точка, начала дѣйствовать некоторая постоянная сила F . Вслѣдствіе этого тѣло начнетъ двигаться въ направленіи силы, и въ концѣ первой секунды приобрететъ некоторую скорость a .

Если бы по истеченіи первой секунды сила F перестала дѣйствовать, то, по закону инерціи, тѣло продолжало бы двигаться по тому же направленію прямолинейно и равномерно со скоростью a . Но если сила будетъ продолжать дѣйствовать на тѣло, то, по закону независимости дѣйствія силъ, она и во вторую секунду сообщитъ тѣлу точно такую же скорость a , такъ что въ концѣ 2-ой секунды тѣло будетъ уже имѣть скорость $a + a = 2a$. Въ течение 3-ей секунды сила сообщитъ тѣлу еще новую скорость a , такъ что въ концѣ 3-ей секунды скорость тѣла будетъ $2a + a = 3a$. Точно такъ, въ концѣ 4-ой секунды скорость тѣла будетъ $4a$, и вообще въ концѣ t -ой секунды скорость тѣла $= at$.

Итакъ, скорость тѣла въ каждую единицу времени увеличивается на одну и ту же величину a , которая такимъ образомъ представляетъ не что иное какъ постоянное ускореніе, т.-е. свободное тѣло, находившееся въ покое, придобываетъ описанная на него постоянная сила въ равномерно-ускоренное движеніе.

§ 79. Допустимъ теперь, что то же самое тѣло равномерно двигалось со скоростью v_0 въ тотъ моментъ, когда на него начала дѣйствовать по направленію движенія та же самая постоянная сила F .

По закону независимости дѣйствія силъ, въ концѣ 1-ой секунды скорость тѣла увеличится на прежнюю величину a и будетъ $v_0 + a$, въ концѣ 2-ой секунды скорость будетъ $v_0 + 2a$, въ концѣ 3-ей секунды $v_0 + 3a$, въ концѣ t -ой секунды $v_0 + at$.

Итакъ, въ этомъ случаѣ движеніе тѣла будетъ также *равно-
мѣрно-ускоренное*. Пространство, пройденное имъ во время t , бу-
детъ $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

Это движеніе, какъ уже указывалось, можно разсматривать во
всякій моментъ, какъ состоящее изъ двухъ движеній, происходи-
щихъ по одному направленію: одного равномернаго со скоростью
 v_0 и другого равноускореннаго съ ускореніемъ a , но безъ началь-
ной скорости, т.-е. вполнѣ тождественнаго съ тѣмъ движеніемъ,
которое получило бы то же тѣло, но находившееся въ покое, отъ
дѣйствія той же постоянной силы F .

Итакъ, второе движеніе зависитъ исключительно отъ дѣйствія
силы F . Первое же движеніе, очевидно, нисколько не зависитъ
отъ силы F , такъ какъ оно уже существовало до ея дѣйствія.
Отсюда мы должны заключить, что причина этого движенія заклю-
чается въ свойствахъ самого тѣла, а именно въ *инерціи* его вещества.

Такимъ образомъ *равномерное движеніе происходитъ только
отъ инерціи*.

§ 80. Если на тѣло равномерно движущееся тѣло начнетъ
дѣйствовать постоянная сила F въ направленіи, противоположномъ
начальной скорости v_0 , то въ концѣ 1-ой секунды скорость тѣла
уменьшится на величину a и будетъ $v_0 - a$, въ концѣ 2-ой се-
кунды скорость будетъ $v_0 - 2a$, въ концѣ t -ой секунды $v_0 - at$.

Очевидно, что въ этомъ случаѣ *движеніе будетъ равномерно-
замедленное*. Пространство, пройденное тѣломъ, во время t , будетъ
 $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$.

Легко видѣть, что этотъ случай движенія, уже разсмотрѣнными
нами на примѣрѣ вертикальнаго восхожденія тяжелаго тѣла, под-
тверждаетъ все только что сказанное о вліяніи инерціи и постоян-
ной силы на движеніе тѣла.

§ 81. Если на свободное равномерно-движущееся тѣло начнетъ
дѣйствовать постоянная сила *подъ некоторымъ угломъ къ на-
правленію движенія*, то тѣло будетъ двигаться *криволинейно*,
а именно, описывая некоторую *параболу**) и *перемѣнно*, какъ это
мы уже видѣли на одномъ частномъ примѣрѣ.

*) Видъ этой параболы, очевидно, зависитъ отъ величины начальной ско-
рости v_0 , ускоренія a и угла, образуемаго направлениемъ скорости v_0 и уско-
ренія a (или, что все равно, силы F).

Весьма понятно, что если на тѣло будетъ действовать *пере-
менная* сила, то и движение тѣла будетъ *переменное*. При этомъ,
если сила будетъ переменная только по *величинѣ*, но постоянная
по *направленію*, то, когда это направленіе совпадаетъ съ началь-
ной скоростью тѣла, движение будетъ *переменное прямолинейное*,
а когда не совпадаетъ, то *переменное криволинейное*.

Сила, *переменная по величинѣ и направленію*, понятно, про-
изводитъ *переменное и криволинейное движеніе*.

§ 82 Силы пропорціональны своимъ ускореніямъ. Вѣ предыдущемъ
мы видѣли, что постоянная сила F , приложенная къ некоторому
свободному тѣлу, сообщаетъ ему во всѣхъ случаяхъ одно и то же
ускореніе a . Предположимъ, что къ тому тѣлу приложена не
сила F , а другая постоянная сила F_1 , которая въ n разъ болѣе F .
Легко доказать, что эта сила сообщитъ нашему тѣлу ускореніе
 $a_1 = na$.

Дѣйствительно, силу F_1 мы всегда можемъ представить какъ
сумму изъ n силъ равныхъ F . По закону независимости дѣйствія
силъ, каждая изъ этихъ n силъ сообщитъ тѣлу ускореніе a . слѣ-
довательно всѣ онѣ вмѣстѣ или, что все равно, одна сила F_1 ,
сообщитъ ускореніе $a + a + \dots + a = na = a_1$.

Итакъ, если одна сила въ n разъ болѣе (или менѣе) другой,
то и ускореніе, сообщаемое одному и тому же тѣлу первой силой,
будетъ въ n разъ болѣе (или менѣе) ускоренія, сообщаемого вто-
рой силой, такъ что $\frac{F_1}{F} = \frac{a_1}{a}$. Если къ одному и тому же тѣлу
приложены двѣ силы F_1 и F_2 , которыя не содержатся одна въ
другой цѣлаго числа разъ, то и въ такомъ случаѣ будемъ имѣть,
что $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}$, гдѣ a_1 и a_2 — ускоренія, сообщаемыя рассмат-
риваемому тѣлу силами F_1 и F_2 .

Въ самомъ дѣлѣ, мы всегда можемъ найти такую третью силу F ,
которая будетъ *общимъ мѣромъ* для силъ F_1 и F_2 , т. е. будетъ со-
дѣржаться въ каждой изъ нихъ цѣлое число разъ.

Допустимъ напр., $F_1 = pF$ и $F_2 = qF$, такъ что

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{p}{q}. \quad (1)$$

Назовемъ ускореніе, сообщаемое силой F нашему тѣлу че-

Уравненіе $m = \frac{F}{a}$ читается такъ. *масса тѣла равна частному отъ дѣленія силы на ускореніе.*

а уравненіе $F = ma$: *сила равна произведенію массы тѣла на ускореніе.*

Уравненіе $F = ma$, устанавливающее зависимость между силою, массою тѣла и ускореніемъ, получаемымъ тѣломъ отъ силы, есть одно изъ важнѣйшихъ уравненій механики

§ 84. **Масса тѣла и ея измѣреніе.** *Физическое значеніе массы тѣла есть количество вещества, содержащагося въ тѣлѣ.*

Механическое опредѣленіе массы тѣла, какъ частнаго отъ дѣленія силы на сообщаемое ею этому тѣлу ускореніе, какъ скоро увидимъ, вполне согласуется съ ея физическимъ опредѣленіемъ, и кромѣ того позволяетъ установить мѣру или единицу массы, съ которой можно сравнивать или, что все равно, посредствомъ котораго можно измѣрять массы какихъ угодно тѣлъ.

За единицу массы принимаютъ массу такого тѣла, которому единица силы сообщаетъ ускореніе, равное единицѣ длины.

Найдемъ вѣсъ этого тѣла. Такъ какъ $m = \frac{P}{g}$, то, очевидно, что масса тѣла m будетъ $= 1$, если $\frac{P}{g} = 1$, т. е. *въ единицѣ массы содержится столько единицъ вѣса, сколько единицъ длины содержится въ ускореніи силы тяжести.*

Такимъ образомъ, принимая за единицу вѣса килограммъ, а за единицу длины метръ, найдемъ, что единица массы вѣситъ 9,8 килограмма, такъ какъ $g = 9,8$ метра.

Принимая же за единицы вѣса и длины русскія мѣры: пудъ и футъ, получимъ, что русская единица массы вѣситъ 32,2 пуда.

Выбирая другія единицы длины и вѣса, получимъ другія единицы массы. Напр., взявъ граммъ и сантиметръ, получимъ, что единица массы вѣситъ 980 граммовъ, а принявъ дюймъ длины и вѣса фунтъ и футъ, получимъ, что единица массы вѣситъ 32,2 фунта и т. д.

Задача. Къ свободному тѣлу, вѣсящему 35 килограммовъ и находившемуся въ покой, приложена постоянная сила въ 2 килорр. Найти 1) ускореніе, сообщенное тѣлу; 2) путь, пройденный имъ въ 3 секунды; 3) скорость въ концѣ 3-ей секунды.

Рѣшеніе. Изъ уравненія $F = ma$ получимъ, что $a = \frac{F}{m}$

Найдемъ прежде всего массу данного тѣла:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{35}{9,8} = \frac{25}{7}.$$

Слѣдовательно, ускореніе $a = \frac{2,7}{\frac{25}{7}} = 0,56$ метра

Такъ какъ движеніе тѣла будетъ равноускоренное, то путь, пройденный имъ въ три секунды, опредѣлится изъ уравненія

$$s = \frac{at^2}{2}, \text{ т.-е. } s = \frac{0,56 \cdot 9}{2} = 2,52 \text{ м.}$$

Скорость въ концѣ 3-ей секунды $v = at = 0,56 \cdot 3 = 1,68$ м.

Примечаніе. Опредѣленное такимъ образомъ значеніе единицы массы имѣетъ тотъ недостатокъ, что зависитъ отъ единицы вѣса, которая, какъ извѣстно, не есть постоянная величина. Поэтому въ научныхъ работахъ употребляется часто другая система мѣръ, въ которой за единицу массы принимаютъ массу или количество вещества, заключающагося въ 1 куб. сантиметрѣ чистой воды при 4° С. Эту единицу массы называютъ *граммомъ*. (Не слѣдуетъ смѣшивать граммъ-массу съ граммомъ-вѣсомъ. Граммъ-вѣсъ имѣетъ различное значеніе на различныхъ широтахъ, напр., на полюсѣ и на экваторѣ, между тѣмъ какъ граммъ-масса имѣетъ вездѣ одно и то же значеніе). За единицу силы принимаютъ силу, называемую *динномъ*, которая сообщаетъ единицѣ массы (грамму) ускореніе въ 1 сантим. въ 1 секунду. Такая система мѣръ называется *абсолютной* или *системой С. Г. С.*, такъ какъ основаніемъ ей служатъ три постоянныя величины: сантиметръ (С), граммъ (Г) и секунда (С).

§ 85 Пропорціональность массъ вѣсамъ и объемамъ. Положимъ, что имѣемъ два тѣла, вѣса которыхъ равны P_1 и P_2 . Тогда масса первого тѣла $m_1 = \frac{P_1}{g}$, а масса второго тѣла $m_2 = \frac{P_2}{g}$, откуда

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2},$$

т.-е. массы m_1 и m_2 пропорціональны ихъ вѣсамъ.

Если эти тѣла *однородныя*, т.-е. если они состоятъ изъ одного и того же вещества, или если вообще равные объемы ихъ имѣютъ и равные вѣса, то, очевидно, массы такихъ тѣлъ пропорціональны ихъ объемамъ:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{V_1}{V_2}.$$

§ 86. Представимъ, что къ тѣлу массы m_1 приложена сила F_1 , а къ тѣлу массы m_2 приложена сила F_2 . Тогда первое тѣло получитъ нѣкоторое ускореніе a_1 , а второе — ускореніе a_2 , при чемъ

$$F_1 = m_1 a_1 \quad \text{и} \quad F_2 = m_2 a_2, \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}.$$

Раземотримъ 3 частные случая этого равенства.

1. Силы равны $F_1 = F_2$. Тогда $\frac{m_1 a_1}{m_2 a_2} = 1$, или $m_1 a_1 = m_2 a_2$.

откуда $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$, т. е. равная сила (или, что все равно, одно и та же сила) сообщаютъ тѣламъ ускоренія, обратно пропорціональныя ихъ массамъ.

Очевидно, что если при этомъ окажется, что ускоренія a_1 и a_2 равны, то можемъ заключить, что и массы m_1 и m_2 тѣлъ равны и наоборотъ. Отсюда вытекаетъ такое определеніе равныхъ силъ: *силы равны, если, действуя на одинаковыя массы, они сообщаютъ имъ одинаковыя ускоренія.*

2. Массы равны $m_1 = m_2$. При этомъ $\frac{F_1}{F_2} = \frac{a_1}{a_2}$, т. е. если массы тѣлъ равны, то ускоренія пропорціональны силамъ.

3. Ускоренія равны $a_1 = a_2$. Тогда $\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2}$, т. е. если ускоренія равны, то силы пропорціональны массамъ тѣлъ.

§ 87. Итакъ, если одна и та же сила дѣйствуетъ на различныя тѣла, то ускоренія, сообщаемыя силой, *проутъ тѣмъ меньше, чѣмъ масса тѣла больше.* Но, по первому закону механики, тѣло сопротивляется измѣненію своего покоя или движенія влѣдствіе инерціи. Слѣдовательно, чѣмъ больше будетъ масса тѣла, тѣмъ больше оно будетъ инертно. Инертность же тѣла есть свойство его вещества, откуда слѣдуетъ, что тѣло будетъ тѣмъ больше инертно, чѣмъ больше въ немъ вещества или матеріи.

Такимъ образомъ по массѣ тѣла мы можемъ судить о количествѣ заключающагося въ немъ матеріи или просто называть *массою тѣла количество его матеріи или вещества.*

Статика.

§ 88. Основная теорема. Если равны и противоположны силы, приложенны къ движущему тѣлу, то тѣло, находясь въ какомъ нибудь состояніи, останется въ томъ же состояніи, въ которомъ оно находилось до начала дѣйствія этихъ силъ.

Дѣйствительно, единственно возможныя силы F_1 и F_2 (фиг. 34) состоятъ въ стремленіи измѣнить разстояніе между точками A и B тѣла, но такъ какъ въ абсолютномъ покое или разстояніе между точками неизмѣнимо, то, следовательно, дѣйствія этихъ силъ взаимно уничтожаются и никакого измѣненія въ состояніи тѣла не производятъ.

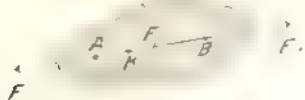


Фиг. 34

Справедливость этой теоремы доказывается также и слѣдующимъ образомъ. Если равны и противоположны силы со общаго центра, по второму закону механики равны и противоположны ускоренія, но въ такомъ случаѣ ускоренія равны нулю, т.е. иначе говоря, совокупное дѣйствіе этихъ силъ равно нулю, следовательно, обѣ силы взаимно уравновѣшиваются. Отсюда слѣдуетъ, что если къ тѣлу приложить или отъ тѣла отнять какое нибудь число взаимно уравновѣживающихся силъ, то состояніе его не измѣнится.

Слѣдствіе. Дѣйствіе силъ, приложенныхъ къ движущему тѣлу, не измѣнится, если точки приложения силъ перенести въ какую угодно точку того тѣла, не жонировавъ направленія силъ, или если можно перенести не только направленіе, при чемъ величина силъ не измѣнится.

Положимъ, что къ тѣлу въ точкѣ A приложена сила F . Приложимъ къ точкѣ B , лежащей на направленіи AF (фиг. 35), двѣ



Фиг. 35

силы F_1 и F_2 , равныя силѣ F и прямо противоположныя, т. е. такое состояніе тѣла не измѣнится. Но силы AF и BF_2 , будучи равны и противоположны, взаимно уравновѣшиваются и, слѣдовательно, могутъ быть оторваны. Тогда останется сила F_1 , равная первоѣ силѣ F , но приложенная къ точкѣ B . Такимъ образомъ получимъ, что точка приложения силы F перенесена въ точку B , причемъ никакого измѣненія въ дѣйствіи силы не произошло.

Сложеніе и разложеніе силъ.

§ 89 Понятіе о равнодѣйствующей. Вообразимъ, что на какое-либо тѣло, находящееся въ покоѣ, дѣйствуютъ n различныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$. Если эти силы взаимно-уравновѣшиваются, т. е. дѣйствіе каждой-либо изъ нихъ напр. силы F_1 , уничтожается или уравновѣшивается дѣйствіемъ всѣхъ остальныхъ силъ.

Представимъ себѣ, что мы оторвали все силы кромѣ F , но зато приложили одну новую силу F' , равную и прямо-противоположную силѣ F_n . Очевидно, что при этомъ тѣло по-прежнему будетъ оставаться въ покоѣ.

Итакъ, дѣйствіе $n-1$ силъ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ вполне замѣнялось дѣйствіемъ одной силы F' .

Сила, дѣйствіе которой вполне замѣняетъ совокупное дѣйствіе нѣсколькихъ другихъ силъ, называется ихъ *равнодѣйствующею*, а замѣняемыя ею силы называются ея *составляющими* или *слагающими*.

Точно также если тѣло не находится въ равновѣсіи, а движется съ некоторымъ ускореніемъ a подъ дѣйствіемъ двухъ или нѣсколькихъ силъ, то мы можемъ вообразить, что совокупное дѣйствіе этихъ силъ можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ одной силы, приложенной къ тѣлу въ некоторой точкѣ и сообщаящей ему то же самое ускореніе a . Эта послѣдняя сила и будетъ *равнодѣйствующею* приложенныхъ силъ.

Определение равнодействующей по данным составляющим называется *сложением сил*.

Понятно, что возможна и обратная задача: одну данную силу замѣнить нѣсколькими друими силами, совокупное дѣйствіе которыхъ было бы одинаково съ дѣйствіемъ данной силы.

Такая замѣна одной силы нѣсколькими называется *разложеніемъ силы* и представляетъ, вообще говоря, неопределенную задачу.

§ 90. Слѣдуетъ замѣтить, что сложене и разложеніе силъ, и также равнодѣйствующая сила и ее точка приложения суть не только *обсужденныя понятія*, вводимыя для объясненія и разъясненія напѣхъ, представленныя о дѣйствіяхъ и свойствахъ силъ, а такъ особенности для упрощенія рѣшенія основной задачи статики: опредѣленія условій равновѣсія тѣла, находящагося подъ дѣйствіемъ силъ.

Сложене силъ не всегда возможно: существуетъ какъ увидимъ, также нѣсколько случаевъ, въ которыхъ совокупное дѣйствіе двухъ силъ не можетъ быть замѣнено дѣйствіемъ одной или. Тогда говорить, что такія силы не имѣютъ равнодѣйствующей.

§ 91. Силы, приложенныя къ тѣлу, могутъ находиться или въ одной плоскости, или въ различныхъ плоскостяхъ.

Если двѣ силы лежатъ въ *одной плоскости*, то направленія ихъ или 1^о, идутъ по одной прямой, или 2^о, пересѣкаются между собою, или 3^о, параллельны другъ другу.

Если двѣ силы не лежатъ въ одной плоскости, то направленія ихъ представляютъ двѣ пересѣкающіяся и параллельныя прямыя. Такія прямыя называются *перекрѣстными*.

Сложене и разл. силъ въ одну совокупно можно въводить, смотря по тому, какъ эти силы лежатъ въ одной или въ разныхъ плоскостяхъ, исключе исключеніемъ одного частнаго случая, который мы подробно разберемъ впоследствии.

Итакъ, рассмотримъ послѣдовательно три случая сложенія силъ, приложенныхъ къ тѣлу:

- 1) если силы дѣйствуютъ по направленію одной прямой;
- 2) если направленія силъ сходятся или пересѣкаются;
- 3) если направленія силъ параллельны.

Сложение силъ, дѣйствующихъ по одному направленію.

§ 92. Теорема. *Равнодѣйствующая сила силъ, дѣйствующихъ по одному направленію, имѣетъ то же направленіе и равна суммѣ ихъ, если силы дѣйствуютъ въ одну сторону, и равна разности ихъ, если силы дѣйствуютъ въ противоположныя стороны*

Положимъ, что къ нѣкоторому тѣлу, массѣ котораго назовемъ черезъ m , приложены двѣ силы P и Q , дѣйствующие по одному направленію и въ одну сторону, причемъ сила P сообщаетъ тѣлу ускореніе a_1 , а сила Q — ускореніе a_2 .

Перенесемъ точки приложения силъ въ какую-нибудь одну точку тѣла, лежащую на направленіи силъ. Вѣдѣствіе совокупнаго дѣйствія обѣихъ силъ тѣло получитъ составное ускореніе $a = a_1 + a_2$, равное суммѣ ускореній, сообщаемыхъ отдѣльно силами P и Q , но, очевидно, что то же самое ускореніе наше тѣло могло бы получить отъ третьей силы R , приложенной въ той же точкѣ, идущей по тому же направленію и равной суммѣ силъ P и Q , такъ какъ $R = ma = m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2 = P + Q$. Если силы P и Q дѣйствуютъ по одному направленію, но въ разныя стороны, то составное ускореніе, получаемое тѣломъ отъ совокупнаго дѣйствія обѣихъ силъ, будетъ $a' = a_1 - a_2$ (если $P > Q$). Но, очевидно, что же самое ускореніе тѣло получило бы отъ третьей силы $R' = P - Q$, совпадающей по направленію съ болѣею силою P , такъ какъ $R' = ma' = m(a_1 - a_2) = ma_1 - ma_2 = P - Q$.

§ 93. Очевидно, что случай сложения двухъ силъ, идущихъ по одному направленію, легко распространить и на случай сложения какого угодно числа такихъ же силъ, такъ что можно считать доказанной слѣдующую общую теорему.

Равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ по одной прямой, равна суммѣ ихъ, если всѣ силы дѣйствуютъ въ одну сторону, въ противномъ же случаѣ, равнодѣйствующая равна избытку суммы силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону, надъ суммой силъ дѣйствующихъ въ противоположную сторону.

Называя силы, дѣйствующія въ одну сторону, *положительными*, а въ противоположную сторону *отрицательными*, можно высказать эту теорему еще въ болѣе общей формѣ

Равновѣсїе цѣпца нѣсколькихъ силъ, состоящихъ по одной прямой, равно по величинѣ и направлено и обратное суммѣ всѣхъ этихъ силъ.

Вѣсьма очевидно, что эту задачу легко рѣшить и графически т. е. построениемъ.

Сложение сходящихся силъ.

§ 94. **Сходящіяся силы** Силы называются *сходящимися*, если направленія ихъ пересѣкаются въ одной точкѣ.

Вообразимъ, что къ свободному твердому тѣлу приложено нѣсколько сходящихся силъ.

Если перенесемъ эти силы по ихъ направленію въ общую точку пересѣченія, то получимъ, что *всѣ данныя силы приложены къ одной точкѣ тѣла*. Эти силы могутъ лежать или въ одной плоскости, или въ разныхъ плоскостяхъ, причемъ, однако, *линейная ось сходящихся силъ, очевидно, всегда лежитъ въ одной плоскости*.

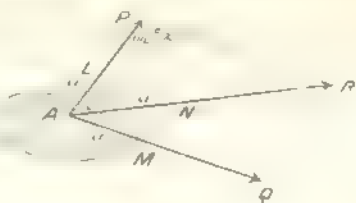
Изученіе сложенія сходящихся силъ начнемъ съ простѣйшаго случая, т. е. съ сложенія двухъ сходящихся силъ.

§ 95. **Параллелограммъ силъ.** Положимъ, что въ точкѣ *A* свободного тѣла приложены двѣ силы *P* и *Q* (фиг. 36) и требуется найти ихъ равнодѣйствующую.

Силы *P* и *Q* сообщаютъ нашему тѣлу ускоренія $a_1 = \frac{P}{m}$ и $a_2 = \frac{Q}{m}$ (гдѣ *m*—масса тѣла) по своему направленію.

При этомъ тѣло получаетъ составное ускореніе *a*, равное по величинѣ и направленію диагонали параллелограмма *ALNM*, построеннаго на ускореніяхъ $a_1 = AL$ и $a_2 = AM$, какъ на сторонахъ.

Мы всегда можемъ предстать, однако, что это послѣднее ускореніе *a* сообщаетъ тѣлу некоторая третья сила *R*, направленіе которой совпадаетъ съ направленіемъ этого ускоренія, а величина равна произведенію иль ускоренія на массу тѣла, такъ что $R = ma$.



Фиг. 36.

Но, очевидно, что, увеличивъ стороны $AL = a_1$, Q и $AM = a_2$, параллелограмма $ALMN$ въ m разъ, мы получимъ новый параллелограммъ $APRQ$, стороны котораго будутъ по величинѣ и направленію равны даннымъ силамъ $P = ma_1$ и $Q = ma_2$, а диагональ $R = ma$ представитъ по величинѣ и направленію результирующую этихъ силъ. Итакъ:

Равнодействующая двухъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, равна по величинѣ и направленію диагонали параллелограмма, построеннаго на этихъ силахъ, какъ на сторонахъ.

Это положеніе, одно изъ самыхъ основныхъ положеній механики, называется *параллелограммомъ силъ*.

Что бы графически опредѣлить числовую величину равнодействующей (напр., въ килограммахъ или ньютонахъ), достаточно смѣрять длину отрезка AR и сравнить ее съ масштабомъ силъ, выбраннымъ для силъ P и Q .

§ 96. Аналитическое опредѣленіе равнодействующей двухъ сходящихся силъ. Если уголъ между силами P и Q есть α , то уголъ $APR = 180^\circ - \alpha$, и, следовательно, изъ \triangle -ка APR , получимъ, что $R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos(180^\circ - \alpha)$ или $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$, откуда

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha} \dots \dots \dots (1)$$

Обозначивъ уголъ между R и P черезъ α_1 , а уголъ между R и Q черезъ α_2 (такъ что $\angle (R, P) = \alpha_1$; $\angle (R, Q) = \alpha_2$) въ того же \triangle -ка APR будемъ имѣть

$$R : P : Q = \sin \alpha : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1 \dots \dots \dots (2)$$

Частные случаи 1. Если $\alpha = 0^\circ$ или $\alpha = 180^\circ$, то силы P и Q идутъ по одной прямой и въ первомъ случаѣ въ одну сторону, причемъ $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ} = P + Q$, а во второмъ случаѣ — въ противоположныя стороны, причемъ*)

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ} = P - Q.$$

(Обобщеніе правила параллелограмма на случай двухъ силъ, идущихъ по одному направленію)

*) Такъ какъ $\cos 0^\circ = 1$ и $\cos 180^\circ = -1$

2. Если $\alpha = 90^\circ$, т. е. силы P и Q взаимно перпендикулярны, то, так как $\cos 90^\circ = 0$:

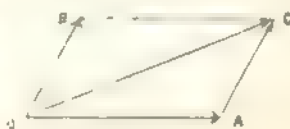
$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad P = R \sin \alpha, \quad Q = R \cos \alpha, \quad \text{и} \quad \tan \alpha = \frac{P}{Q}.$$

3. Если $P = Q$, то $R = \sqrt{2P^2 - 2P^2 \cos \alpha} = P \sqrt{2(1 + \cos \alpha)} = 2P \cos \frac{\alpha}{2}$.

Изъ выражения (1) для равнодействующей видно, что величина ея зависит не только отъ величинъ составляющихъ, но и отъ угла α между ними. Можетъ случиться, что величина равнодействующей будетъ меньше каждой изъ составляющихъ, но во всякомъ случаѣ R не можетъ быть $> P + Q$ и меньше $P - Q$.

Задача. Определить, при какомъ углѣ α , равнодействующая R равна каждой изъ составляющихъ, если $P = Q$.

§ 97. Треугольникъ силъ. Легко видѣть, что для графическаго опредѣленія равнодействующей двухъ сходящихся силъ нѣтъ необходимости строить полныя параллелограммы. Для него достаточно изъ конца одной силы, выраженной отрѣзкомъ OA (фиг. 37), провести прямую AC , равную и параллельную другой силѣ OB и точку C соединить съ точкой приложения силъ O . Прямая OC , представляющая замыкающую сторону треугольника силъ OAC , и есть искомая составляющая.



Фиг. 37.

Какъ видно, сложениіе стоящихъ силъ подобно сложению скоростей или ускореній (§ 51), что безъ сомнѣнія и можно было получить, такъ какъ ускоренія пропорциональны силамъ, сопоставлять съ ними по направленію и точно также графически изображаются прямыми линиями (отрицательными *).

Построеніе треугольника силъ представить такъ называемое геометрическое сложение, а поэтому равнодействующая двухъ сходящихся силъ равна геометрической суммѣ ихъ.

*. Отрѣзки, имѣющіе опредѣленную длину, направленіе и положеніе, которыми въ механикѣ графически изображаются перемѣщенія, скорости, ускоренія и силы, называются *векторами*. Два вектора называются геометрически равными, если они имѣютъ равную длину, параллельны и одинаково направлены. Геометрическое сложение и есть сложение векторовъ.

§ 98. Многоугольникъ силъ. Положимъ, что на точку A тѣла дѣйствуютъ четыре силы F_1, F_2, F_3 и F_4 (фиг. 38). Сложивъ по правилу параллелограмма силы F_1 и F_2 , получимъ ихъ равнодѣйствующую R_1 . Сложивъ R_1 и силу F_3 найдемъ R_2 , равнодѣйствующую тремъ силамъ. Наконецъ, сложивъ R_2 и четвертую силу F_4 , найдемъ искоемую равнодѣйствующую R всѣхъ данныхъ силъ. Но такъ какъ противоположныя стороны параллелограмма равны и параллельны, то равнодѣйствующую сходящихся силъ можно найти также съ помощью слѣдующаго построения: изъ конца



Фиг. 38

первой силы F_1 проводить прямую $1, R_1$, равную и параллельную второй силѣ F_2 , изъ точки R_1 прямую R_1, R_2 , равную и параллельную третьей силѣ F_3 и, наконецъ, изъ точки R_2 — прямую R_2, R , равную и параллельную четвертой силѣ F_4 . Прямая AR , соединяющая точку A приложения силъ съ найденной точкой R , и есть вѣковая равнодѣйствующая.

Изъ чертежа видно, что здѣсь получается многоугольникъ $AF_1R_1R_2R$, называемый *многоугольникомъ силъ*. Силы, приложенныя къ A ду, составляютъ стороны этого многоугольника, идущія по одному направлеңію или



Фиг. 39

теченію, а равнодѣйствующая представляетъ послѣднюю или замыкающую сторону, идущую по *остроуголу* точекъ.

Отсюда попятно, что если, при *построеніи* *многоугольника силъ*, стороны его, замкнутся сами со-

бой (фиг. 39) то это значитъ, что равнодѣйствующая сходящихся силъ *равна нулю*, или ч. *то есть силъ равнодѣйствующая равна нулю*.

Слѣдствие. Положимъ что даны силы F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 , сходящіяся въ точкѣ A . Найдемъ ихъ равнодѣйствующую по правилу многоугольника и замкнемъ еще скрѣпимъ на нѣбѣ торую *прямую* *равнодѣйствующую* AA . Изъ чертежа *фиг. 40* видно, что *она* *равна нулю*.

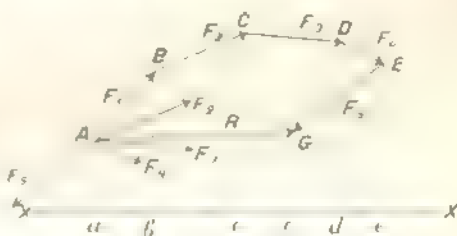
ны силы $F_1 = ab$; проекция $F_2 = bc$; проекция $F_3 = cd$, проекция $F_4 = de$; проекция $F_5 = ef$ *, и проекция $R = ag$. Такъ какъ

$$ag = ab + bc + cd + de + ef,$$

то слѣдовательно

проекция $R = \text{пр. } F_1 + \text{пр. } F_2 + \text{пр. } F_3 + \text{пр. } F_4 + \text{пр. } F_5$, или проекция равнодѣйствующей составляется изъ на какую-либо произвольную ось проекцій составляющихъ на эту же самую ось. (Теорема проекцій силъ).

Примечаніе 1. Весьма понятно, что данныя силы мы можемъ складывать въ какомъ угодно порядкѣ, напр., силу F_1 съ силой F_2 , затѣмъ силу F_2 съ силой F_3 и наконецъ ихъ равнодѣйствующія R' и R'' . Въ результатѣ получимъ снова ту же самую равнодѣйствующую R . Итакъ, если силы будемъ складывать по правилу многоугольника въ различномъ порядкѣ, то форма



Фиг. 40.

многоугольниковъ можетъ быть различная, но послѣдняя или замыкающая сторона ихъ будетъ одна и та же прямая AK **).

Примечаніе 2. Если данныя сходящіяся силы не лежатъ въ одной плоскости, то, при указанномъ построении, получается такъ называемый *многоугольникъ*, стороны котораго лежатъ въ различныхъ плоскостяхъ.

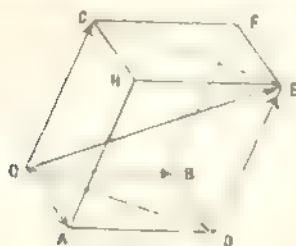
§ 50. Параллелепипедъ силъ. Сложеніе трехъ сходящихся силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, кромѣ способа многоугольника, можно еще произвести способомъ построения такъ называемаго *параллелепипеда силъ*. Построенію параллелепипеда силъ, очевидно, вполнѣ равнодѣйственно съ построеньемъ параллелепипеда скоростей или ускореній (§ 53).

* Проекція, даваемая на одну ось, равнодѣйствующей, слѣдуетъ считать *положительной*, а идущая по противу — *отрицательной*.

** Представимъ себѣ имевъ самостоятельно родъ af и ae такихъ угловъ, какъ и сходящіяся три силы, въ числу которыхъ сходящаяся въ a было бы af и ae составляемъ, вѣтъ af и ae даемъ масштабъ af .

Положимъ, что даны три такія силы F_1 , F_2 и F_3 , сходящіяся въ точку O и соответственно изображаемыя отрезками OA , OB и OC (фиг. 41).

Проведемъ три плоскости через OA и OB , через OA и OC и через OB и OC , а затѣмъ черезъ точки A , B , C три другія плоскости, соответственно параллельныя тремъ плоскостямъ. Тогда



Фиг. 41

у насъ получится параллелепипедъ $OABDCFEH$, діагональ котораго $OE = R$ и будетъ искомою равнодѣйствующею тремъ даннымъ силамъ F_1 , F_2 , F_3 .

Дѣйствительно, какъ видно изъ чертежа, равнодѣйствующая сила F_1 и F_2 , изображаемыхъ отрезками OA и OB , выразится отрезкомъ OD , а равнодѣйствующая этой послѣдней силы и третьей силы F_3 выразится отрезкомъ OE , т. е. діагональю нашего параллелепипеда.

Итакъ, *равнодѣйствующая тремъ силамъ, не лежащимъ въ одной плоскости, равна по величинѣ и направленію діагонали параллелепипеда, построеннаго на данныхъ силахъ, какъ на ребрахъ.*

Если три данныя силы F_1 , F_2 и F_3 взаимно перпендикулярны, то при построении получается *прямоугольный* параллелепипедъ. Въ этомъ случаѣ, обозначивъ углы, образуемые силами F_1 , F_2 , F_3 съ равнодѣйствующею R , черезъ α , β и γ и замѣтивъ, что данныя силы представляютъ проекціи равнодѣйствующей на ихъ направленія, будемъ имѣть слѣдующія равенства:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_1}{R}, \quad \cos \beta = \frac{F_2}{R}, \quad \cos \gamma = \frac{F_3}{R}.$$

Примечаніе. Возвысивъ три послѣднія равенства въ квадраты и сложивъ ихъ по частямъ, получимъ

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2}{R^2} \quad \text{или}$$

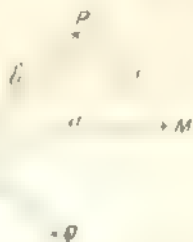
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

т. е. сумма квадратовъ косинусовъ угловъ, образуемыхъ діагональю прямоугольнаго параллелепипеда съ его ребрами, равна единицѣ.

§ 100 Разложение сил Разложение силы на две сходящиеся составляющие силы, вообще говоря, задача неопределенная, так как она сводится къ построению треугольника силы по одной (данной) стороне. Поэтому, чтобы получить вполне определенное решение, необходимо, кроме данной силы, знать еще какия-нибудь *или* величины, достаточныя для построения одного определенного треугольника, например, величины обеих составляющих сил, или углы, образуемые ихъ направлениями съ равнодействующей, или величину и направление одной изъ составляющих и т. д. Приведемъ нѣсколько примѣровъ разложения силъ.

Задача 1. Силу, выражаемую отрезкомъ a , разложить на две силы, выражаемые отрезками b и c (фиг. 42).

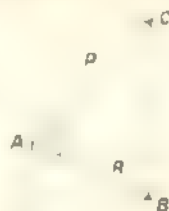
Вопросъ сводится къ построению треугольника (силъ) по тремъ даннымъ сторонамъ a , b и c . Построимъ треугольникъ AM , изъ точки A проводимъ прямую AQ , равную и параллельную сторонѣ PM — c . Искомыя силы будутъ AP и AQ .



Фиг. 42.

Задача 2. Разложить силу $R = AB$ на две силы, изъ которыхъ одна сила $P = AC'$ дана по величинѣ и направленію (фиг. 43).

Построимъ треугольникъ ABC по двумъ сторонамъ и углу между ними, изъ точки A проведемъ прямую AD , равную и параллельную прямой CB . Прямая AD и выражаетъ искомую вторую (слагающую) Q по величинѣ и направленію.

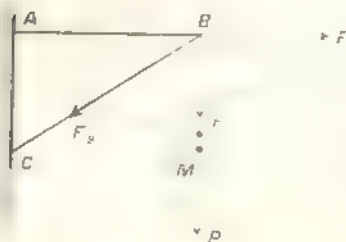


Фиг. 43.

Задача 3. На клинцѣ ABC , состоящемъ изъ двухъ стержней AB и BC , вѣшанныхъ въ стѣну, повѣшенъ грузъ M , вѣсъ котораго графически изображается отрезкомъ MP . Опредѣлить натяжение стержней AB и BC (фиг. 44).

Перенесемъ силу MP по ея направленію въ точку B и такъ, чтобы $BF = MP$ и разложимъ силу BF по направленіямъ AB и BC . Для этого изъ конца F данной силы проведемъ прямыя FF_1 и FF_2 , параллельныя AB и BC , до пересѣченія съ этими

линиями или ихъ продолженіями. Тогда получимъ параллелограммъ BF_1FF_2 , стороны котораго BF_1 и BF_2 и выражаютъ искомыя натяженія стержней. Изъ направленія найденныхъ составляющихъ можемъ заключить еще, что сила BF_1 *растягиваетъ* стержень AB , а сила BF_2 *сжимаетъ* стержень BC .



Фиг. 44

Предлагается рѣшить эту же задачу вычисленіемъ, если грузъ равняется 10 килогр., а уголъ ABC равенъ: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 50° .

Разложеніе данной силы F на три составляющихъ опредѣленнымъ образомъ возможно только въ томъ случаѣ, если даны три дополнительныя величины, на-примѣръ три угла, образуемые направленіями искомыхъ составля-

ющихъ и равнодѣйствующей. Вопросъ сводится тогда къ построению параллелепипеда по данной диагонали и угламъ, составленнымъ ею съ ребрами.

§ 101. Аналитическое опредѣленіе равнодѣйствующей нѣсколькихъ сходящихся силъ приложенныхъ къ одной точкѣ, какъ опредѣленіе составной скорости сложнаго движенія (§ 56).

Каждую изъ данныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ разлагаютъ по правилу параллелепипеда на три составляющія силы по направленію трехъ взаимно-перпендикулярныхъ осей OX, OY и OZ , пересекающихся въ точкѣ O приложенія данныхъ силъ. Затемъ складываютъ полученные составляющія силы, идущія вдоль каждой изъ осей и находятъ ихъ равнодѣйствующія R_x, R_y и R_z . Наконецъ складываютъ по правилу параллелепипеда эти три равнодѣйствующія и получаютъ силу равнодѣйствующую R всемъ даннымъ силамъ. Эта равнодѣйствующая и также углы α, β, γ , образуемые ею съ составляющими R_x, R_y и R_z опредѣлены по извѣстнымъ уже формуламъ:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R} \quad (2)$$

Частный случай. Если все сходящиеся силы лежатъ въ одной плоскости, то ихъ слѣдуетъ разложить (или спроектировать) по направлениямъ двухъ осей OX и OY , лежащихъ въ той же самой плоскости и затѣмъ сложить въ двѣ равнодѣйствующія R_x и R_y . Общая равнодѣйствующая всѣхъ силъ, очевидно, будетъ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

а уголъ α , образуемый ею съ составляющей R_x , опредѣлится изъ равенствъ:

$$R_x = R \cos \alpha; \quad R_y = R \sin \alpha; \quad \tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}.$$

Слѣдствие. Изъ выражения $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ слѣдуетъ, что $R = 0$, если $R_x = 0$, $R_y = 0$ и $R_z = 0$, т.-е. что равнодѣйствующая нѣсколькихъ сходящихся силъ только тогда равна нулю, когда каждая изъ ея составляющихъ по 3-мъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ равна нулю.

Отсюда вытекаетъ, что три сходящихся силы, не лежащая въ одной плоскости, не могутъ взаимно уравновѣшиваться, такъ какъ всегда имѣютъ равнодѣйствующую, не равную нулю.

Сложеніе параллельныхъ силъ.

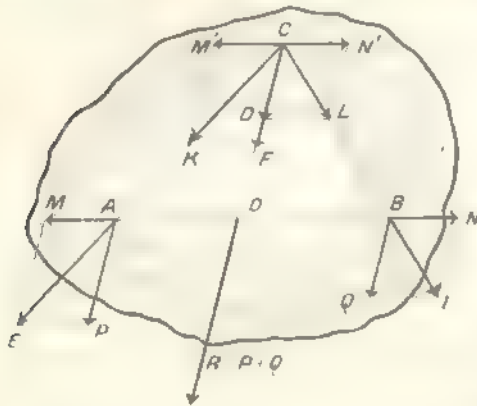
§ 102. Сложеніе двухъ параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну сторону. *Равновѣствующая имъ сила параллельныхъ силъ, направленная въ одну сторону, равна суммѣ ихъ параллельныхъ и направлена въ ту же сторону точка приложения ея лежитъ на прямой, соединяющей точки приложения составляющихъ на части, обратно пропорціональныя этимъ силамъ.*

Положимъ, что къ двумъ точкамъ A и B свободного тѣла приложены двѣ параллельныя и въ одну сторону направленныя силы P и Q (фиг. 45). Требуется найти величину, направленіе и точку приложения ихъ равнодѣйствующей.

Соединимъ точки A и B прямою и къ концамъ ея приложимъ равныя и прямо-противоположныя силы M и N . Какъ извѣстно, эти двѣ силы взаимно уравновѣсятся и никакого измѣненія въ состояніи тѣла не производятъ.

Теперь сложимъ сходящіяся силы AP и AM , а также BQ и BN и затѣмъ перенесемъ равнодѣйствующія AE и BV въ точку C

ихъ пересѣченія, такъ что $AE = CK$ и $BJ = CL$. Проведемъ черезъ точку C прямую $M'N'$, параллельную AB , и прямую CO , параллельную направлению силъ P и Q . Разложимъ силу CK на силы CF и CM' , а силу CL на силы CD и CN' .



Фиг. 45.

Изъ равенства \triangle -ковъ AME и $CM'K$ слѣдуетъ, что $AM = CM'$, а изъ равенства \triangle -ковъ BNJ и $CN'L$, — что $BN = CN'$. Но такъ какъ $AM = BN$, то и $CM' = CN'$, а потому эти силы, какъ равныя и прямопротивоположныя, можно отбросить.

Тогда у насъ останутся только двѣ силы: CF —равная и параллельная силѣ P и CD —рав-

ная и параллельная силѣ Q . Сложивъ силы CF и CD , получимъ искомую равнодѣйствующую $R = P + Q$.

Перенесемъ точку приложения равнодѣйствующей въ точку O , лежащую на прямой AB , — надемъ отношеніе $\frac{AO}{BO}$.

Изъ подобныхъ \triangle -ковъ ACO и KCF находимъ, что

$$\frac{AO}{CO} = \frac{KF}{CF} \dots \dots \dots (1),$$

а изъ подобныхъ \triangle -ковъ BCO и LCD что

$$\frac{BO}{CO} = \frac{DL}{CD} \dots \dots \dots (2)$$

Раздѣливъ по частямъ равенства (1) и (2), получимъ

$$\frac{AO \cdot CO}{CO \cdot BO} = \frac{KF \cdot CD}{CF \cdot DL}, \text{ или}$$

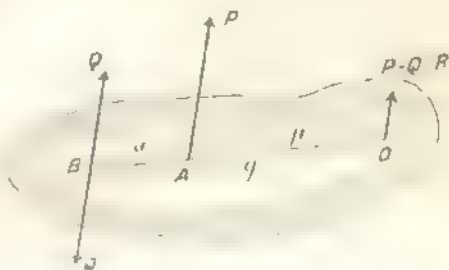
имѣтимъ, что $KF = DL$ и сократимъ

$$\frac{AO}{BO} = \frac{CD}{CF}, \text{ или наконецъ } \frac{AO}{BO} = \frac{Q}{P} \dots \dots \dots (3).$$

— прямая AB дѣлится въ точкѣ O на части AO и BO , обратно пропорціональныя силамъ P и Q .

§ 103 Сложение двух параллельных сил, действующих въ разныхъ стороны. *Равнодействующая двухъ параллельныхъ силъ, равна ихъ сумме, параллельна имъ, действуетъ въ направлении той или силы и приложена къ ней, расстояние отъ той или точки приложения составляющей силъ пропорциональны этимъ силамъ.*

Положимъ что въ точкахъ A и B тѣла приложены двѣ параллельныя силы P и Q , при чемъ $P > Q$ (фиг. 46). Разложимъ силу P на двѣ параллельныя слагающія силы такъ, чтобы одна изъ нихъ была равна силѣ Q и приложена къ точкѣ B . На основаніи предыдущей теоремы находимъ, что вторая слагающая равна $P - Q$ (такъ какъ $Q + P - Q = P$) и приложена въ точкѣ O , расстояние которой отъ точки B определится изъ только что введенной пропорціи



Фиг. 46.

$$\frac{AB}{AO} = \frac{P - Q}{Q} \quad \dots \dots \dots (1).$$

Теперь, вмѣсто двухъ силъ P и Q , имѣемъ три силы $P - Q$, Q и Q , изъ которыхъ двѣ послѣднія, какъ равныя и прямо противоположныя, взаимно уравновѣшиваются и потому могутъ быть отброшены. Такимъ образомъ остается только одна сила $P - Q$ и Q , которая, слѣдовательно, и будетъ искомымъ равнодействующей.

Чтобы найти отношеніе расстояній точки O приложения равнодействующей отъ точекъ A и B приложения составляющихъ P и Q , прибавимъ къ обѣимъ частямъ пропорціи (1) по единицѣ

Тогда получимъ:

$$\frac{AB + AO}{AO} = \frac{P - Q + Q}{Q} \quad \text{или} \quad \frac{BO}{AO} = \frac{P}{Q},$$

что и слѣдовало доказать.

§ 104. **Пара силъ.** Сложене двухъ параллельныхъ силъ P и Q , дѣйствующихъ въ разные стороны, представляетъ весьма замѣчательную особенность, когда $P = Q$, т.-е. когда эти силы равны.

Въ этомъ случаѣ равнодѣйствующая $R = P = Q = 0$, а разстояние ея отъ точки A или $AO = \frac{AB \cdot Q}{P + Q} = \frac{AB \cdot Q}{0} = \infty$, т.-е. равнодѣйствующая равна нулю, а точка приложенія ея отъ составляющихъ удалена на безконечно-большое разстояние.

Такиа своеобразныя рѣшенія указываютъ на непримѣнимость теоремы въ данномъ случаѣ, откуда слѣдуетъ заключить, что *равныя и параллельныя силы, дѣйствующія въ разные стороны, не имѣютъ равнодѣйствующей.*

Такая система параллельныхъ силъ называется *парой силъ*. Пара силъ представляетъ такую же самостоятельную причину движенія, какъ и сила. Поэтому изученіе ея свойствъ составляетъ особый отдѣлъ механики, къ которому мы и перейдемъ въ ближайшемъ будущемъ.

105. **Зависимость между силами P , Q и R и разстояніями ихъ точекъ приложенія** Положимъ черезъ $a = AB$ разстояние между точками приложенія силъ P и Q , а черезъ p и q разстоянія AO и BO дляхъ точекъ отъ точки приложенія равнодѣйствующей R . Между силами P , Q , R и разстояніями p , q , a существуетъ постоянная зависимость, одинаково справедливая, будучи ли параллельныя составляющія P и Q направлены въ одну или въ разные стороны, а именно:

$$\frac{R}{a} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p} \dots \dots \dots (1)$$

или *отношеніе каждой изъ трехъ силъ P , Q и R къ разстоянію между точками приложенія есть остатокъ силъ сего величина постоянная*

Докажемъ эту теорему. Какъ уже было выведено для обоихъ случаевъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} \dots \dots \dots (2)$$

1-й случай. Прибавимъ къ обѣимъ частямъ равенства (2) по единицѣ. Тогда

$$\frac{P+Q}{Q} = \frac{p+q}{p},$$

или (см. фиг. 45)

$$\frac{R}{Q} = \frac{a}{p}, \quad \text{или} \quad \frac{R}{a} = \frac{Q}{p} \dots \dots \dots (3)$$

Написавъ равенство (2) въ видѣ $\frac{P}{q} = \frac{Q}{p}$ и, соединивъ его съ равенствомъ (3), получимъ

$$\frac{R}{a} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p}.$$

2-й случай. Вычтемъ изъ обѣихъ частей равенства (2) по единицѣ. Тогда

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{q-p}{p},$$

или (см. фиг. 46)

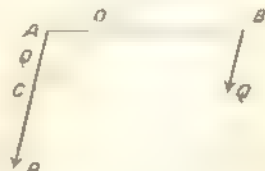
$$\frac{R}{Q} = \frac{a}{p}, \quad \text{или} \quad \frac{R}{a} = \frac{Q}{p}.$$

Соединивъ только что указаннымъ образомъ это равенство съ равенствомъ (2) по прежнему получимъ

$$\frac{R}{a} = \frac{P}{q} = \frac{Q}{p}.$$

§ 106 Графическое опредѣленіе точки приложенія равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ. По даннымъ слагаемымъ P и Q и разстоянію a между нѣмъ точками приложенія, легко опредѣлить построеніемъ точку приложенія равнодѣйствующей.

Для этого отъ точки A (фиг. 47 и 48) по направленію большей силы отложимъ отрезокъ AC — величинѣ меньшей силы Q , а отъ точки B по направленію, противоположному силѣ Q , отложимъ отрезокъ BD — величинѣ силы P . Соединивъ точки C и D прямою, находимъ въ пересѣченіи прямой CD съ AB (или ея про-



Фиг. 47.

долженіемъ точку O , которая и есть искомая точка приложенія равнодѣйствующей.

Дѣйствительно изъ подобныхъ \triangle -ковъ AOO' и BOD имѣемъ, что

$$\frac{AO}{BO} = \frac{Q}{P}.$$

§ 107. Разложеніе равнодѣйствующей на двѣ составляющія производится при помощи основныхъ уравненій

$$R = P + Q \quad \text{и} \quad \frac{R}{a} = \frac{P}{p} = \frac{Q}{q}.$$

Такъ какъ изъ *трехъ* уравненій можно опредѣлить только *три* неизвѣстныхъ величины, то, слѣдовательно, задача о разложеніи равнодѣйствующей R имѣетъ опредѣленное рѣшеніе только въ тѣхъ случаяхъ, когда изъ 5 величинъ a, p, q, P, Q двѣ величины даны условиями задачи *).

Въ качествѣ примѣра, укажемъ графическое рѣшеніе слѣдующей задачи:

Разложить силу R на двѣ параллельныя силы, дѣйствующія въ одну сторону, если даны p и q .

Построимъ на прямой AB $\tau a = p + q$ параллелограммъ такъ, чтобы сторона его AC была равна и параллельна прямой $OR = R$

Диагональ BC параллелограмма раздѣлитъ прямую OR въ точкѣ E на два отрезка $OE = P$ и $ER = Q$, которые и представятъ искомыя составляющія. Дѣйствительно, изъ подобныхъ \triangle -ковъ ABC, OBE и CER слѣдуетъ, что

$$\frac{R}{a} = \frac{P}{p} = \frac{Q}{q}.$$

§ 108. Сложеніе нѣсколькихъ параллельныхъ силъ. Положимъ, что къ тремъ точкамъ A, B и C абсолютно твердаго тѣла прило-

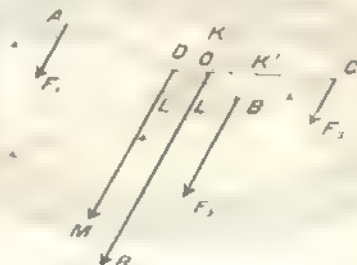
*). Ученикамъ рекомендуется заняться самостоятельно о тѣхъ же задачахъ, какъ вычисленіемъ (аналитически), такъ и построеніемъ (графически).

жены параллельныя силы P_1 , P_2 и P_3 , действующія въ одномъ направленіи. Требуется найти величину, направленіе и точку приложенія равнодѣйствующей.

Сложивъ по известнымъ уже правиламъ сперва двѣ силы P_1 и P_2 , наидёмъ ихъ равнодѣйствующую $M = P_1 + P_2$ и точку D ея приложенія. Сложивъ затѣмъ силу M и третью данную силу P_3 , наидёмъ искомую равнодѣйствующую $R = P_1 + P_2 + P_3$ и точку O ея приложенія.

Точно также поступаютъ, если дано 4 и болѣе силъ.

Если дано нѣсколько параллельныхъ силъ, изъ которыхъ однѣ P_1 , P_2 , P_3 .. дѣйствуютъ въ одну сторону, а другія P'_1 , P'_2 , P'_3 .. въ другую сторону, то, сложивъ сперва всѣ силы, дѣйствующія въ одну, а затѣмъ всѣ силы, дѣйствующія въ другую сторону, получимъ двѣ равнодѣйствующія параллельныя силы, идущія въ разныя стороны:



Фиг. 50

$$R_1 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots \quad \text{и} \quad R_2 = P'_1 + P'_2 + P'_3 \dots$$

Сложивъ силы R_1 и R_2 получимъ равнодѣйствующую R всѣхъ данныхъ силъ. Направленіе равнодѣйствующей R очевидно параллельно направленію данныхъ силъ, а величина равна алгебраической суммѣ ихъ, т. е.

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots - P'_1 - P'_2 - P'_3 \dots$$

или, короче:

$$R = \Sigma P.$$

Примечаніе. Вѣсьма понятно, что параллельныя силы, приложенныя къ тѣлу, могутъ и не находиться въ одной плоскости.

§ 109. Центръ параллельныхъ силъ. Точка O приложенія равнодѣйствующей, опредѣленная по известнымъ правиламъ сложенія

параллельныхъ силъ, обладаетъ замѣчательнымъ свойствомъ, вслѣдствіе котораго она носитъ особое названіе *центра параллельныхъ силъ*.

Вообразимъ, что мы повернули въ данную систему силъ около ихъ точекъ приложения на одинъ и тотъ же уголъ, т. е. не измѣняя ихъ параллельности. Тогда, очевидно, и равнодѣйствующая R повернется на тотъ же самый уголъ, причѣмъ величина и точка O приложения ея останутся безъ измѣненія. Но если бы мы ранѣе перенесли точку O въ какую-нибудь другую точку, напримѣръ, въ точку K или въ точку L , делающія въ направленіи равнодѣйствующей, то, при поворотѣ равнодѣйствующей, эти точки также перемѣстятся бы въ точки K' или L' .

Слѣдовательно, точка O есть *единственная точка, которая при любомъ поворотѣ силъ сохраняетъ всегда одно и то же определенное положеніе*.

§ 110. Если силы R_1 и R_2 , т. е. равнодѣйствующие параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одну и въ другую сторону, будутъ равны между собою, то будемъ имѣть одинъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ.

1-й случай. Если R_1 и R_2 имѣютъ одну общую точку приложения, то эти силы, какъ равныя и прямо-противоположныя, взаимно уравниваются, т. е. ихъ общая равнодѣйствующая R будетъ $= 0$ и, слѣдовательно, тѣло подѣ дѣйствіемъ всѣхъ данныхъ силъ останется въ равновѣсіи.

2-й случай. Если R_1 и R_2 приложены въ двухъ различныхъ точкахъ, то эти силы образуютъ такъ называемую *пару силъ*, которая не можетъ быть уравновѣшена одной силой, такъ какъ не имѣетъ равнодѣйствующей. Пара силъ, какъ скоро увидимъ, можетъ быть уравновѣшена только другою парой силъ.

§ 111. Разложеніе данной силы на нѣсколько параллельныхъ есть задача, вообще говоря, неопредѣленная и даже не всегда возможная. Рѣшимъ для примѣра одну изъ такихъ задачъ.

На столѣ, опирающійся на три ножки, положенъ грузъ P . Опредѣлить давленіе отъ груза на каждую изъ трехъ ножекъ.

Вопросъ сводится къ разложенію силы P , приложенной въ точкѣ O , на три параллельныя составляющія силы, приложенныя въ точкахъ A , B , C (фиг. 51).

Соединимъ прямою AO точки A и O и продолжимъ ее до пересѣченія съ прямою BC въ точкѣ D .

Измѣривъ разстоянія AO и DO , разложимъ силу P на двѣ параллельныя составляющія F_1 и M , приложенныя въ точкахъ A и D , принимая во вниманіе извѣстныя равенства:

$$P = F_1 + M \text{ и } \frac{OD}{AO} = \frac{F_1}{M}$$

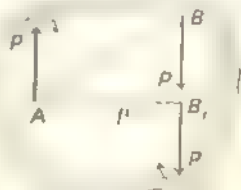
Затѣмъ точно такимъ же способомъ разложимъ силу M на двѣ параллельныя составляющія F_2 и F_3 , приложенныя въ точкахъ B и C , по условіямъ

$$M = F_2 + F_3 \text{ и } \frac{DC}{DB} = \frac{F_2}{F_3}.$$

Итакъ, предложенная задача имѣетъ вполнѣ определенное рѣшеніе *).

Пары силъ.

§ 112. **Опредѣленія.** Какъ уже извѣстно изъ предыдущаго, двѣ равныя параллельныя силы P и P , направленныя въ разные стороны и приложенныя къ двумъ точкамъ A и B одного и того же твердаго тѣла, образуютъ такъ называемую *пару силъ* (фиг. 52). Кратчайшее разстояніе AB , между силами называется *плечомъ* пары. Такъ какъ точку B приложения силы всегда можно перенести въ точку B , конца плеча, то въ дальнейшемъ изложеніи всегда будемъ принимать, что концы плеча или перпендикуляра къ обѣимъ силамъ пары совпадаютъ съ точками приложения этихъ силъ. Плоскость, проходящая черезъ



Фиг. 52

*) Рекомендуемъ рѣшить эту задачу графически и аналитически по самостоятельно выбраннымъ даннымъ величинамъ.

обѣ силы пара, называютъ *плоскостною парой* (плоскостью дѣйствія пары).

Пару, состоящую изъ двухъ силъ P и P , сокращенно обозначаютъ такъ (P, P) .

§ 113. Дѣйствіе пары силъ на тѣло, очевидно, заключается въ томъ, что она стремится вращать тѣло въ ту или другую сторону, смотря по направленію силъ. Если силы направлены такъ, какъ показано на фиг. 52, то говорятъ, что пара стремится вращать

тѣло по направленію, совпадающему съ направлениемъ движенія часовой стрѣлки. При обратномъ направленіи силъ (фиг. 53) пара вращаетъ тѣло въ направленіи, обратномъ движенію часовой стрѣлки.



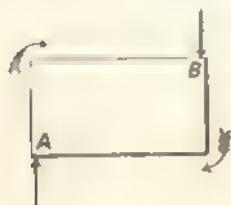
Фиг. 53.

Пара силъ, какъ извѣстно, не имѣетъ равнодѣйствующей, т.-е. пара не можетъ быть замѣнена, а слѣдовательно и не можетъ быть уравновѣшена какою-либо силой. Это прямо вытекаетъ изъ того простаго соображенія, что *сила* стремится сообщитъ свободному тѣлу *поступательное* движеніе, а *пара* — *вращательное*.

Такимъ образомъ пара силъ не способна возбудить самостоятельную причину вращательнаго движенія.

Дѣйствіе пары силъ можно обнаружить на слѣдующемъ простомъ опытѣ. Положимъ на гладкомъ столѣ какой-нибудь предметъ,

напр. переплетенную книгу, и сообщимъ ему въ точкахъ A и B (фиг. 54) по направленіямъ, указаннымъ стрѣлками, два одновременныхъ и равносильныхъ толчка посредствомъ двухъ равноупругихъ и одинаковыхъ сжатыхъ пружинъ (или еще проще посредствомъ двухъ палочекъ пальцами). Мы замѣтимъ тогда, во-1-хъ, что на тѣло по-



Фиг. 54.

лучить только одно вращательное движеніе (безъ поступательнаго) по направленію движенія часовой стрѣлки, и, во-2-хъ, что нельзя найти на тѣлѣ такой точки, приложивъ къ которой какую-нибудь силу, можно было бы остановить вращеніе. Вращеніе прекращается здѣсь влѣдствіе сопротивленія отъ тренія.

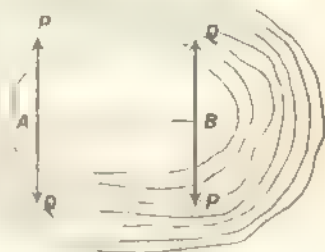
§ 114 Моментом пары называется произведение $P.p$ из величины одной силы P пары на длину p ее плеча (фиг. 52—53). Такъ какъ силы измѣряются единицами вѣса, а плечи единицами длины, то моментъ пары представляетъ сложно-именованное число (килограммо-метры или пудо-футы).

Моментъ пары, какъ увидѣть, измѣряется *величина* или *напряженіе* пары. За единицу или мѣру моментовъ принимаютъ моментъ, равный произведенію изъ единицы силы (килограммъ или пудъ) на плечо, равное единицѣ длины (метру или футу). Такая единица моментовъ называется килограммо-метромъ или пудо-футомъ *).

Видно, понятно, что употребляютъ и другія единицы моментовъ, напр., килограммо-сантиметры, фунто-футы и проч., если это окажется удобнымъ по роду данныхъ величинъ.

Замѣтимъ, что численная величина пары равна численной величинѣ удвоенной площади Δ -ка ABP (фиг. 53)

Если пара стремится вращать тѣло по направленію движенія часовой стрѣлки, то моментъ ея считается *положительнымъ*, а если въ обратномъ направленіи, то—*отрицательнымъ*.



Фиг. 55.

§ 115. Основные свойства паръ. Двѣ пары (P, P) и (Q, Q) имѣющія общее плечо AB (фиг. 55), равныя по величинѣ силы ($P = Q$) и противоположныя по ихъ направленію, взаимно уничтожаются или уравниваются. Это слѣдуетъ изъ того, что такіа двѣ пары представляютъ ничто иное, какъ систему четырехъ взаимноуравновѣсывающихся силъ

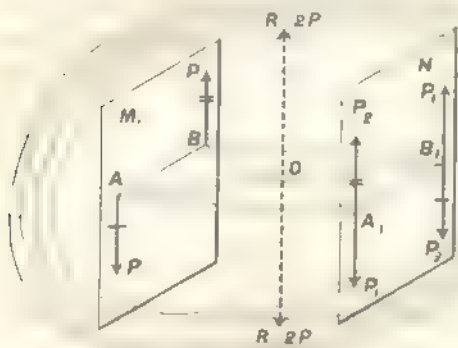
Всякую пару безъ измѣненія ея дѣйствій можно:

- 1) перенести параллельно самой себѣ въ любое мѣсто ея плоскости или даже другой параллельной плоскости;
- 2) повернуть на произвольный уголъ около какой угодно точки ея плеча или его продолженія.

* Замѣтимъ, что 1 пудо-футъ—5 килограммо-метрамъ.

3) замѣнить другой парой съ другой силой и другимъ плечомъ, но съ тѣмъ же моментомъ по величинѣ и направленію.

§ 116. **Параллельное перенесеніе пары.** Положимъ, что къ нѣ-
которому тѣлу въ плоскости M приложена пара (P, P) съ плечомъ
 AB (фиг. 56). Эту пару можно перенести параллельно самой себѣ



Фиг. 56.

въ какое угодно мѣсто
этой плоскости или
другой параллельной
плоскости, напр. плос-
кости N , принадлежа-
щей тому же самому
тѣлу. Докажемъ вторую
часть этой теоремы.

Проведемъ гдѣ-ли-
бо въ плоскости N пря-
мую A_1B_1 , равную и
параллельную прямой
 AB , и приложимъ къ

концамъ ея двѣ равныя и противоположныя пары или, что все
равно, четыре равныя и противоположныя силы (P_1, P_1) и (P_2, P_2) ,
такія, что $P_1 = P_2 = P$. Какъ извѣстно, при этомъ никакого
измѣненія въ состояніи тѣла не произойдетъ.

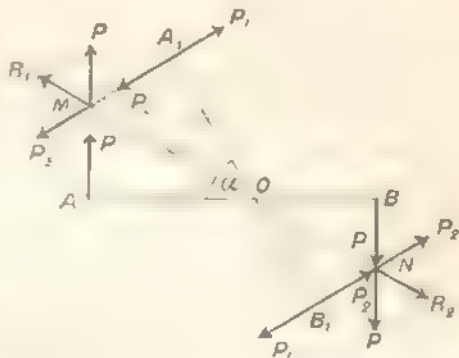
Соединимъ прямыми точки A, B, A_1 и B_1 . Такъ какъ $AB =$
 $= A_1B_1$, то и $AA_1 = BB_1$. Следовательно, 4-угольникъ
 ABA_1B_1 есть параллелограммъ и AB_1, BA_1 — диагонали его, дѣ-
лящіяся въ точкѣ O пополамъ.

Сложивъ параллельныя и въ одну сторону направленныя
силы, приложенныя къ точкамъ A и B_1 , а также къ точкамъ
 B и A_1 , получимъ двѣ равныя и противоположныя равно-
дѣйствующія $2P$, приложенныя къ точкѣ O , которыя взаимно унич-
жаются.

Итакъ, у насъ осталась только одна пара (P_1, P_1) съ плечомъ
 A_1B_1 , которую можемъ разсматривать, какъ первоначальную
пару (P, P) , перенесенную параллельно самой себѣ въ параллель-
ную плоскость, причѣмъ никакого измѣненія въ дѣйствіи пары не
произшло.

Очевидно, что доказательство не измѣнится, если пару (P, P)
мы передвинемъ параллельно самой себѣ въ ея плоскости M .

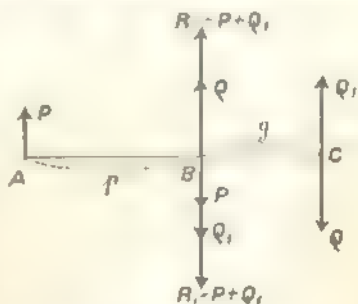
§ 117. Вращение пары. Пусть дана пара (P, P') съ плечомъ AB (фиг. 57). Проведемъ прямую A_1B_1 , пересекающую AB въ точкѣ O подъ произвольнымъ угломъ α и отложимъ $OA_1 = OA$ и $OB_1 = OB$. Такимъ образомъ мы какъ будто повернули прямую AB , около точки O на уголъ α . Приложимъ къ концамъ прямой A_1B_1 двѣ равныя и противоположныя пары (P_1, P_1') и (P_2, P_2') , приче́мъ $P_1 = P_2 = P$.



Фиг. 57.

Не трудно замѣтить изъ равенства \triangle -ковъ AOM и A_1OM и \triangle -ковъ BON и B_1ON , что прямая MN , соединяющая точки M и N пересѣкаема параллельной силой P и P_2 , съ равнодѣйствующею угломъ α . Поэтому, если перенесемъ точки приложенія равныхъ силъ P и P_2 въ точки M и A и сложимъ эти силы, то получимъ двѣ равныя равнодѣйствующія R_1 и R_2 , направленные прямо противоположно другъ другу вдоль прямой MN . Это слѣдуетъ изъ того, что прямыя R_1 и R_2 дѣлятся угломъ M и N , а следовательно и угломъ α пополамъ. Такъ какъ равнодѣйствующія R_1 и R_2 взаимно уничтожаются, то изъ всѣхъ шести силъ у насъ осталось только двѣ, образующія пару (P_1, P_1') съ плечомъ A_1B_1 , которая произведетъ точно такое же дѣйствіе, какъ и первоначально данная пара (P, P') .

§ 118. Замѣна одной пары другой съ равнымъ моментомъ. Пусть дана пара (P, P) съ плечомъ $AB = p$ (фиг. 58). Продолжимъ AB на произвольную длину $BC = q$ и приложимъ къ концамъ BC



Фиг. 58.

двѣ равныя и противоположныя пары (Q, Q) и (Q_1, Q_1) . Равныя силы Q и Q_1 выберемъ такія, чтобы вѣличина ихъ опредѣлялась

равенством моментов $Pp = Qq$, или, что все равно, пропорцией.

$$\frac{Q}{P} = \frac{p}{q}, \text{ откуда } Q = P \frac{p}{q}.$$

Две силы P и Q_1 , приложенныя къ точкѣ B , дадутъ равнодѣйствующую $R_1 = P + Q_1$; другія двѣ параллельныя силы P и Q_1 , приложенныя въ точкахъ A и C , составяя, дадутъ такую же равнодѣйствующую $R_2 = P + Q_1$, приложенную тоже въ точкѣ B , ибо эта точка дѣлитъ прямую AC на части p и q , обратно пропорціональныя силамъ P и Q . Такъ какъ двѣ равнодѣйствующія R_1 и R_2 взаимно уничтожающа, то изъ трехъ паръ у насъ остается только одна пара (Q, Q) съ плечомъ $BC = q$, которая произведетъ дѣйствіе такое же, какъ и первоначально данная пара (P, P) съ плечомъ $AB = p$, что и слѣдовало доказать.

Слѣствие. Пары съ разными моментами равны между собою.

§ 119. Сравненіе величинъ паръ. I. Величины двухъ паръ съ разными силами, но равными плечами относятся какъ величины силъ.

Положимъ, что къ одному и тому же плечу или къ двумъ равнымъ плечамъ приложены двѣ пары (P, P) и (Q, Q) и для примѣра допустимъ, что $\frac{P}{Q} = \frac{3}{7}$, откуда $\frac{P}{3} = \frac{Q}{7}$.

Легко видѣть, что двѣ пары (P, P) одинаково съ дѣйствіемъ трехъ равныхъ паръ $(\frac{P}{3}, \frac{P}{3})$, а дѣйствіе пары (Q, Q) одинаково съ дѣйствіемъ семи равныхъ паръ $(\frac{Q}{7}, \frac{Q}{7})$, приложенныхъ къ тѣмъ же самымъ плечамъ. Но какъ первая группа изъ трехъ паръ, такъ и вторая группа изъ 7-ми паръ имѣютъ равныя силы $(\frac{P}{3} = \frac{Q}{7})$ и приложены къ одинаковымъ плечамъ, слѣдовательно совокупныя величины ихъ или, что все равно, величины паръ (P, P) и (Q, Q) относятся какъ $\frac{3}{7}$ или какъ P Q , что и слѣдовало доказать.

II. Величины двухъ паръ (P, P) и (Q, Q) съ разными силами и съ разными плечами p и q относятся какъ моменты ихъ, т. е.

$$\frac{P, P}{(Q, Q)} = \frac{Pp}{Qq}$$

Замѣнимъ пару (Q, Q) равною ей парой (X, X) имѣющей плечо p . Силы этой третьей пары найдутся по условію $Xp = Qq$, откуда $X = Q \frac{q}{p}$.

Сравнивая величины паръ (P, P) и (X, X) , имѣющихъ одинаковыя плечи, по предыдущему находимъ

$$\frac{(P, P)}{(X, X)} = \frac{P}{X} = \frac{P}{Q \frac{q}{p}} = \frac{Pp}{Qq},$$

что и слѣдовало доказать, такъ какъ величина пары (X, X) равна величинѣ пары (Q, Q) .

Слѣдствіе 1. Величины паръ съ равными силами, но разными плечами, относятся какъ величины ихъ плечъ.

Слѣдствіе 2. Изъ доказанной теоремы слѣдуетъ, что величины паръ пропорциональны величинамъ ихъ моментовъ, откуда понятно, что измѣреніе величинъ или напряженій паръ сводится къ измѣренію ихъ моментовъ.

§ 120 **Ось пары.** Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что подобно тому какъ *сила* вполнѣ определяется 1) своею точкой приложенія; 2) направлениемъ и 3) величиной, точно такъ же и *пара* определяется: 1) своею плоскостью; 2) направлениемъ вращенія и 3) величиной момента. Затѣмъ какъ силу можно переносить куда угодно по ея направленію, также и пару можно произвольно переносить и поворачивать въ ея плоскости или въ плоскости параллельной. Знаменитый французскій ученый *Понсе* (1777—1859), создавшій въ своемъ сочиненіи „Начала статики“ теорію паръ силъ, замѣтивъ такое сходство (аналогію) между элементами, определяющими силу и пару, предложилъ изображать геометрически пару, подобно силѣ, однимъ прямолинейнымъ отѣзкомъ, назвавъ его *осью пары*.

Ось пары строится такъ. Положимъ, что дана пара силъ, (P, P) , лежащая въ некоторой плоскости (фиг. 54). Возставимъ въ какой-нибудь точкѣ этой плоскости *, напр., въ точкѣ C плеча пары перпендикуляръ къ плоскости слѣдующимъ образомъ.

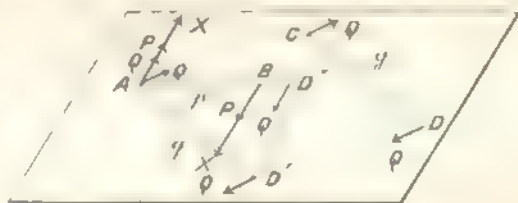
*. Такъ какъ пару можно какъ угодно перемѣщать въ ея плоскости, то и ось пары можно возсавить въ любой точкѣ плоскости и перемѣщать параллельно самой себѣ.

Определение по данным слагающим парамъ ихъ равнодѣйствующей называется *сложениемъ паръ*, а обратная задача: замѣной одной данной пары нѣсколькими слагающими парами— *разложениемъ паръ*.

Слагающія пары могутъ лежать или въ одной плоскости или въ разныхъ плоскостяхъ, которыя могутъ быть или взаимнопараллельными или взаимнопересекающимися. Если плоскости паръ взаимно-параллельны, то, какъ извѣстно, все пары можно перенести въ одну плоскость. Итакъ, при сложении паръ слѣдуетъ рассмотреть только два слѣдующихъ случая: 1) пары лежать въ одной плоскости; 2) пары лежать въ пересекающихся плоскостяхъ.

§ 122. Сложение паръ, лежащихъ въ одной плоскости. Положимъ, что даны двѣ пары: (P, P) съ плечомъ $AB = p$ и (Q, Q) съ плечомъ $CD = q$, ле-

жащія въ одной плоскости (фиг. 60). Передвинемъ пару (Q, Q) по плоскости параллельно самой себѣ такъ, чтобы конецъ C ея плеча совпалъ съ концомъ A пары (P, P) и затѣмъ



Фиг. 60.

повернемъ ее около точки A , чтобы плечо CD совпало по направленію съ плечомъ AB . Наконецъ преобразуемъ пару (Q, Q) въ другую пару (X, X) съ тѣмъ же моментомъ, но съ плечомъ $AB = p$. Сила X опредѣлится по равенству моментовъ $X \cdot p = Qq$, откуда $X = Q \frac{q}{p}$.

Итакъ, мы получимъ двѣ пары (P, P) и (X, X) съ одинакъ и тѣмъ же плечомъ $AB = p$. Совокупное дѣйствіе этихъ паръ, очевидно, равно дѣйствію одной пары $(P + X, P + X)$ съ тѣмъ же плечомъ.

Моментъ этой равнодѣйствующей пары

$$(P + X)p = \left(P + Q \frac{q}{p} \right) \cdot p = Pp + Qq.$$

Весьма понятно, что если бы силы одной изъ паръ были направлены противоположно силамъ другой пары, т. е. если бы мо-

менты слагающих паръ были противоположны между собой по знаку, то моментъ равнодѣйствующей пары равнялся бы

$$(P - X)r = \left(P - Q \frac{q}{r} \right) r = Pr - Qq$$

Распространивъ выведенное правило на случай сложения нѣсколькихъ паръ, одиѣ изъ которыхъ имѣютъ положительныи моменты, а другія—отрицательныи, выекажемъ слѣдующую общую теорему:

Моментъ пары равнодѣйствующейи нѣсколькихъ паръ, лежащихъ въ одной плоскости или въ параллельныхъ плоскостяхъ равенъ алгебраической суммѣ моментовъ слагающихъ паръ.

Слѣдствіе. Если алгебраическая сумма моментовъ паръ, лежащихъ въ одной плоскости, равна нулю, т. е., если сумма моментовъ паръ, действующихъ въ одну сторону, равна суммѣ моментовъ паръ, действующихъ въ обратную сторону, то такія ои системы паръ взаимно уравновѣшиваются.

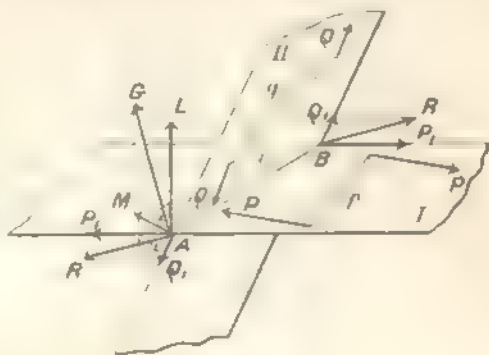
§ 123. Сложеніе паръ, лежащихъ въ одной плоскости и выраженныхъ осями, производится точно такъ же, какъ сложеніе силъ направленныхъ по одной прямой. Дѣйствительно, пусть дано нѣсколько осей такихъ паръ: L_1, L_2, L_3 , съ положительнымъ и L'_1, L'_2, L'_3 .. — съ отрицательнымъ моментомъ. Передвинувъ всѣ оси параллельно самимъ себѣ въ какую-нибудь одну точку O плоскости паръ, сложимъ сперва оси паръ съ положительными моментами, затѣмъ—съ отрицательными и, наконецъ, вычтемъ изъ большей суммы меньшую. Тогда получимъ равнодѣйствующую ось G , причеиъ

$$G = L_1 + L_2 + L_3 + \dots - L'_1 - L'_2 - L'_3 - \dots$$

или короче $G = \sum L$.

§ 124. Сложеніе паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ. Даны двѣ пары: (P, P') съ плечомъ p и (Q, Q') съ плечомъ q , лежащія въ пересѣкающихся плоскостяхъ I и II. Преобразуемъ эти пары въ двѣ другія (P_1, P_1') и (Q_1, Q_1') съ общимъ плечомъ $AB = r$, совпадающимъ съ прямою пересѣченія плоскостей. Сложивъ по правилу параллелограмма силы P_1 и Q_1 , приложенныя въ точкѣ А, а затѣмъ силы P_1' и Q_1' , приложенныя въ точкѣ В, получимъ вѣсто двухъ паръ (P_1, P_1') и (Q_1, Q_1') одну

равнодействующую пару (R, R) съ тѣмъ же плечомъ $AB = r$, но лежащую въ третьей плоскости, положение которой не трудно определить. Такъ какъ силы P_1 и Q_1 лежатъ въ плоскостяхъ I и II и перпендикулярны къ своему плечу AB , то, следовательно, уголъ α между этими силами есть линейный уголъ двуграннаго угла между плоскостями I и II. Точно также углы $\angle (P_1, R)$ и $\angle (Q_1, R)$ между силами P_1 и Q_1 и ихъ равнодействующей R суть линейные углы двугранныхъ угловъ, образуемыхъ плоскостями I и II съ плоскостью равнодействующей пары (R, R) .



Фиг. 61.

Отсюда заключаемъ, что плоскость равнодействующей пары дѣлитъ уголъ между плоскостями слагающихъ паръ точно такъ же, какъ диагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ P_1 и Q_1 , какъ на сторонахъ, дѣлитъ уголъ между этими силами.

Извѣстно, что

$$R^2 = P_1^2 + Q_1^2 + 2P_1Q_1 \cos \alpha. \quad (1)$$

Силы P_1 и Q_1 , полученные при преобразованіи паръ (P, P) и (Q, Q) определяются по равенству моментовъ $Pp = P_1r$ и $Qq = Q_1r$,

откуда $P_1 = P \frac{p}{r}$ и $Q_1 = Q \frac{q}{r}$.

Подставивъ эти величины въ равенство (1), получимъ

$$R^2 = P^2 \frac{p^2}{r^2} + Q^2 \frac{q^2}{r^2} + 2P \frac{p}{r} Q \frac{q}{r} \cos \alpha$$

или

$$(Rr)^2 = (Pp)^2 + (Qq)^2 + 2PpQq \cos \alpha. \quad (2)$$

т.-е. аналитическое выраженіе момента пары, равнодействующей двухъ паръ, лежащихъ въ пересекающихся плоскостяхъ, одинаково съ выраженіемъ величины, равнодействующей двухъ сходящихся силъ.

§ 125. Построить въ точкѣ A ось $L = P_1 r$ и $M = Q_1 r$ паръ (P_1, P_1) и (Q_1, Q_1) и замѣтивъ, что уголъ $LAM = \alpha$, какъ уголъ между перпендикулярами къ плоскостямъ I и II, построить параллелограммъ $ALGM$, который будетъ подобенъ параллелограмму $AP_1 R Q_1$ по равенству угловъ и пропорциональности сторонъ (моменты паръ (P_1, P_1) и (Q_1, Q_1) , имѣющихъ одно общее плечо $AR = r$, относятся какъ силы, т.-е. $\frac{L}{M} = \frac{P_1}{Q_1}$).

Изъ подобія этихъ параллелограммовъ находимъ, что 1) $LAG = P_1 AR$, т.-е. діагональ G перпендикулярна къ плоскости равнодѣйствующей паръ (R, R) и 2) $G : L = R : P_1$, откуда $G = \frac{RL}{P_1} = \frac{RP_1 r}{P}$ или

$$G = R \cdot r,$$

т.-е. диагональ G представляетъ плечо инокъ, какъ ось равнодѣйствующей паръ.

Итакъ, ось паръ, равнодѣйствующей двумъ паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ, равно по величинѣ и направлению результирующей парѣ, построенной на осяхъ составляющихъ паръ, какъ на сторонахъ.

Отсюда понятно, что равенство (2) можно написать въ такомъ видѣ:

$$G^2 = L^2 + M^2 + 2LM \cos \alpha \quad . \quad . \quad (3).$$

§ 126. Многоугольникъ паръ и параллелепипедъ паръ. Установить такимъ образомъ, что сложение паръ, изображенныхъ ихъ осями, производится совершенно такъ же какъ и сложение силъ, дѣйствующихъ на одну точку, легко выведемъ двѣ слѣдующія теоремы.

1. Ось паръ, равнодѣйствующей несколькимъ паръ, лежащихъ въ одной плоскости, равна по величинѣ и направлению результирующей парѣ, построенной на осяхъ составляющихъ паръ, какъ на сторонахъ. (Теорема многоугольника паръ).

2. Ось паръ, равнодѣйствующей тремъ паръ, лежащихъ въ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостяхъ, равна по величинѣ и направлению диагонали параллелепипеда, построеннаго на осяхъ составляющихъ паръ, какъ на ребрахъ. (Теорема параллелепипеда паръ).

Если назовем оси составляющих парь через L , M и N , а ось равнодѣствующей парь через G , то

$$G^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

§ 127. Аналитическое опредѣленіе парь, равнодѣствующей нѣсколькихъ данныхъ парь. Положимъ, что дано нѣсколько (n) парь, лежащихъ въ какихъ угодно плоскостяхъ. Изобразимъ данныя парь ихъ осями L_1, L_2, L_3, \dots и перенесемъ эти оси въ точку O пересѣченія трехъ произвольно выбранныхъ и взаимно перпендикулярныхъ осей OX, OY и OZ . Назовемъ углы, образуемые осями парь съ осью OX , черезъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, съ осью OY черезъ $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$, съ осью OZ черезъ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$.

Разложимъ или спроектируемъ каждую изъ осей парь на направление осей OX, OY и OZ и затѣмъ сложимъ составляющія, идущія по каждой оси, въ три равнодѣствующие G_x, G_y и G_z , получимъ, что

$$G_x = L_1 \cos \alpha_1 + L_2 \cos \alpha_2 + L_3 \cos \alpha_3 + \dots = \sum L \cos \alpha$$

$$G_y = L_1 \cos \beta_1 + L_2 \cos \beta_2 + L_3 \cos \beta_3 + \dots = \sum L \cos \beta$$

$$G_z = L_1 \cos \gamma_1 + L_2 \cos \gamma_2 + L_3 \cos \gamma_3 + \dots = \sum L \cos \gamma$$

Наконецъ сложимъ по правилу параллелепипеда составляющія G_x, G_y и G_z , получимъ искомую равнодѣствующую G въѣхъ данныхъ парь, причемъ

$$G^2 = G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 \quad (1).$$

Углы α, β, γ , образуемые осью равнодѣствующей парь съ осями OX, OY, OZ , опредѣляются уравненіями

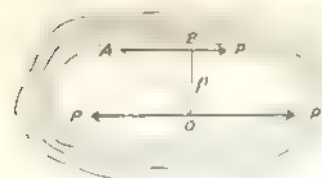
$$\cos \alpha = \frac{G_x}{G}; \cos \beta = \frac{G_y}{G}; \cos \gamma = \frac{G_z}{G} \dots \quad (2).$$

§ 128. Разложеніе парь. Такъ какъ моменты парь, приложенныхъ къ одному и тому же плечу, относятся какъ силы, то отсюда понятно, что разложеніе одной парь на n составляющихъ парь сводится къ задачѣ разложенія силы по способу параллелограмма, разложеніе парь на m составляющихъ парь, лежащихъ въ трехъ различныхъ плоскостяхъ—къ разложенію силы по способу параллелепипеда, наконецъ разложеніе парь на нѣсколько составляющихъ парь къ разложенію силы по правилу многоугольника

Въ особенности просто производить эти разложения, если пары изображены осями, такъ какъ въ этомъ случаѣ нѣтъ задачи, исполнѣть тождественныя съ известными уже задачами о разложении сходящихся силъ. Само собою разумѣется, что каждую изъ разложенныхъ паръ можно преобразовать (въ другую при помощи параллельнаго перенесенія, вращенія и замѣны одного плеча другимъ, если это требуется условіями задачи).

§ 129. Параллельное перенесеніе силы. Разложение силы на силу и пару. Въ заключеніе сказаннаго о парахъ силъ докажемъ слѣдующую весьма важную теорему: *Всякую силу, приложенную къ какой-нибудь точкѣ тѣла, можно перенести параллельно ей нѣпосредственно въ другую произвольно выбранную точку того же тѣла, причѣмъ однако возникнетъ пара съ моментомъ, равнымъ произведенію данной силы на кратчайшее расстояние отъ выбранной точки.*

Предположимъ, что дана нѣкоторая сила P , приложенная къ точкѣ A (фиг. 62). Приложимъ въ какой-нибудь другой точкѣ O



фиг. 62

того же тѣла въ противоположныя силы P и P , равныя и параллельныя данной силѣ, вслѣдствіе чего никакого измѣненія въ состояніи тѣла не произойдетъ. Но три силы P, P, P можно разсматривать, какъ совокупность одной силы P , приложенной къ точкѣ O , и пары (P, P) съ моментомъ

$P \cdot OB = Pr$, что и слѣдовало доказать.

Эта теорема имѣетъ существенное значеніе для рѣшенія вопроса о сложении системы силъ, какъ угодно приложенныхъ къ различнымъ точкамъ тѣла, а слѣдовательно, и для рѣшенія основной задачи статики: опредѣленію условія равновѣсія твердаго тѣла, подверженнаго дѣйствию какихъ угодно силъ.

О моментахъ силъ.

§ 130. Статическій моментъ. Моментъ Pr пары, получившейся при перенесеніи силы P въ точку O (фиг. 62), носить названіе *момента силы относительно точки или статическаго момента силы*.

Надо замѣнить, что понятие о статическомъ моментѣ принадлежитъ гораздо болѣе раннему времени, чѣмъ понятие о парѣ силъ, введенному въ науку Пуансо лишь въ 1803 году. Моментъ силы P относительно точки O (фиг. 63), т. е. произведение изъ величины силы на перпендикуляръ, опущенный изъ точки на направление силы, рассматривается, какъ самостоятельная причина вращательнаго движенія тѣла вокругъ этой точки. Точка O получила названіе *центра момента*, а перпендикуляръ $OB = p$ — *плеча момента*.



Фиг. 63.

Статическій моментъ измѣряется такими же единицами мѣръ какъ и моментъ пары силъ (килограмм-метрами или фунто-футами); численная величина момента равна величинѣ удвоенной площади Δ -ка, основаніе котораго равно данной силѣ P , а высота—плечу ея p . Моменту силы принимается положительное или отрицательное значеніе, смотря по тому, въ какую сторону происходитъ вращеніе по направленію движенія часовой стрѣлки ($+Pr$) или по обратному направленію ($-Qq$).

Понятно, что моментъ силы, направленіе которой проходитъ черезъ центръ моментовъ (напр. силы F), равенъ нулю, такъ какъ плечо этой силы равно нулю.

§ 131. Происхожденіе понятія о моментѣ силы относительно точки, какъ о причинѣ вращательнаго движенія, принадлежать къ самой отдаленной древности. Надо думать, что первоначальнымъ источникомъ этого понятія былъ простѣйшій *инструментъ рычага*, состоящій въ томъ, что посредствомъ рычагомъ дѣйствіе измѣряется произведеніемъ Pr силы P , приложенной къ нему перпендикулярно, на плечо p (фиг. 64).



Фиг. 64.

Этотъ законъ несомнѣнно былъ открытъ человекомъ чисто практическимъ путемъ въ самую первобытную эпоху. Первыми, кто съ научной точки зрѣнія начали разрабатывать теорію рычага и основанную на ней теорію простыхъ машинъ (блокъ, воротъ, винтъ и прочее), были величайшіе механики древности *Арабскіе*

(287—212 до Р. X.),^{*} положивший въ основаніе своихъ рассужденій аксіому: двѣ равныя и параллельныя силы, перпендикулярно приложенныя къ концамъ подпертаго въ серединѣ рычага, взаимно уравниваются. Архимедъ по справедливости считается основателемъ статики твердыхъ и жидкихъ тѣлъ. Удивленіе современниковъ передъ его знаніями открытіями и полезными изобрѣтеніями создало массу легендъ. Такъ, напр., ему приписывается знаменитое изреченіе, которымъ онъ указалъ на могущественное дѣйствіе момента рычага: *Dante mihi punctum, terram movebo*.

Въ теченіе почти 1800 лѣтъ, слѣдовавшихъ за эпохой Архимеда, не было сдѣлано ни одного крупнаго шага въ области механики вообще и статики въ частности. Первымъ толчкомъ, выведшимъ науку изъ этого состоянія отчужденія, были труды гениальнаго итальянца *Леонардо да Винчи* (1452—1519), указавшаго, что моментъ силы, приложенной наклонно къ рычагу, равенъ произведенію изъ силы на перпендикуляръ, опущенный на ея направленіе изъ точки опоры. Слѣдовавшій за нимъ великій *Галилей* (1564—1642) основалъ новый отдѣлъ механики, а именно *статику*. Наиболѣе подробное развитіе *статики* получила лишь въ трудахъ французскаго ученаго *Петра Вариньона* (1654—1722), впервые разработавшаго ученіе о моментахъ силъ и установившаго теорію равновѣсія, основанную на сложении силъ и моментовъ.

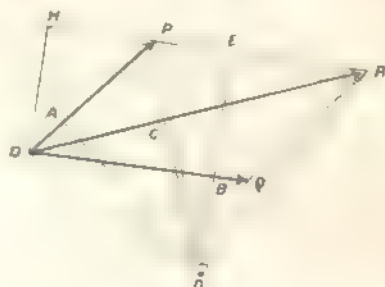
Хотя впоследствии *Ньютономъ* (1677—1729) и доказано, что изобрѣденная имъ теорія паръ силъ наиболѣе естественно и изящно разрѣшается чисто геометрическимъ путемъ, всегдѣ задачи статики однако теорія моментовъ силъ до сихъ поръ не утратила и не можетъ утратить своего значенія, такъ какъ въ тѣхъ случаяхъ (въ особенности въ области прикладной механики) она рѣшаетъ болѣе просто и истинно многіе вопросы, связанныя съ равновѣсіемъ тѣлъ.

Вслѣдствіе этого представляется полезнымъ положить здѣсь самостоятельно вѣдѣнія теоремы касающіяся моментовъ силъ, хотя, повторяемъ эти теоремы или уже были выведены въ теоріи паръ силъ (только въ другой формѣ) или могутъ быть изъ нея выведены.

§ 132 Теорема Вариньона. Моментъ равнодѣйствующей силъ относительно какой-либо точки равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же самой точки.

I. Случай сходящихся силъ.

Даны двѣ сходящіяся силы P и Q , ихъ равнодѣйствующая R и нѣкоторая произвольно взятая точка O , лежащая внѣ угла PDQ между слагающимися (фиг. 65). Опустивъ изъ точки O перпендикуляры OA , OB и OC на направленіе силъ P , Q и R , замѣтимъ, что при данномъ положеніи точки O



Фиг. 65

моменты силъ P и Q имѣютъ одинаковые, а именно положительные знаки. Требуется доказать, что $R \cdot OC = P \cdot OA + Q \cdot OB$ или $\text{Мом } R = \text{Мом } P + \text{Мом } Q$. Соединивъ точку O съ концами силъ P , Q и R находимъ изъ чертежа, что

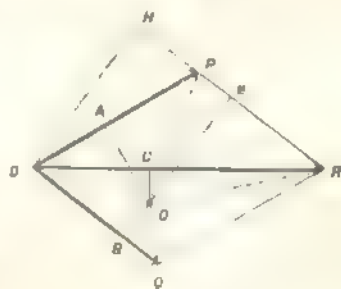
$$\triangle ODR = \triangle ODP + \triangle OPR = \triangle DPR, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} R \cdot OC = \frac{1}{2} P \cdot OA + \frac{1}{2} Q(OB + BE) = \frac{1}{2} Q \cdot DH$$

Замѣтивъ, что $DH = BE$, раскрывъ скобки и сокративъ, получимъ

$$R \cdot OC = P \cdot OA + Q \cdot OB.$$

Если точка O лежитъ внутри угла PDQ между слагающимися P и Q (фиг. 66), то, какъ видно изъ чертежа, моменты слагающихся относительно этой точки имѣютъ противоположные знаки.



Фиг. 66

Въ данномъ случаѣ моментъ силы P положительный, а моментъ силы Q отрицательный. Слѣдовательно, здѣсь слѣдуетъ доказать, что

$$R \cdot OC = P \cdot OA - Q \cdot OB \text{ или } \text{Мом } R = \text{Мом } P - \text{Мом } Q.$$

Соединивъ точку O съ концами силъ, изъ чертежа находимъ, что

$$\triangle ODR = \triangle ODP + \triangle OPR = \triangle DPR \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} R \cdot OC = \frac{1}{2} P \cdot OA + \frac{1}{2} Q \cdot OE = \frac{1}{2} Q \cdot DH.$$

Замѣнивъ DH равной суммой $BO + OE$ и сдѣлавъ упрощенія, получимъ

$$R \cdot OC = P \cdot OA + Q \cdot OB.$$

II. Случай параллельныхъ силъ. Даны двѣ параллельныя силы P и Q , ихъ равнодѣйствующая R и точка O , лежащая на слагающихся (фиг. 67). Моменты силъ P и Q относительно нея — оба положительныя. Слѣдовательно, требуется доказать, что

$$R \cdot OA = P \cdot OB + Q \cdot OC.$$

Нетрудно видѣть, что

$$\begin{aligned} R \cdot OA &= (P + Q) \cdot OA = P \cdot OA + Q \cdot OA = \\ &= P(OB - AB) + Q(AC + OC) = \\ &= P \cdot OB - P \cdot AB + Q \cdot AC + Q \cdot OC. \end{aligned}$$

Но $P \cdot AB = Q \cdot AC$, такъ какъ

Фиг. 67

$$P \cdot AB = P_1 \cdot b = P_1 \cdot a \cdot p + P_2 \cdot a \cdot q = P_1 \cdot a \cdot p + P_2 \cdot a \cdot q = P \cdot a \cdot p + Q \cdot a \cdot q = Q \cdot a \cdot q = Q \cdot AC.$$

$$P = \frac{LN}{LM} = \frac{AC}{AB}, \quad Q = \frac{LM}{LN} = \frac{AB}{AC}$$

Поэтому, уничтоживъ эти члены, получимъ

$$R \cdot OA = P \cdot OB + Q \cdot OC.$$

Взявъ точку O_1 , лежащую между слагающимися P и Q , легко докажемъ подобнымъ же образомъ, что $R \cdot O_1 A_1 = P \cdot O_1 B_1 + Q \cdot O_1 C_1$ (моменты P и Q противоположны по знакамъ). Точно такъ же доказывается теорема Вариньона и для случая двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны.

Если дано нѣсколько сходящихся или параллельныхъ силъ, то, применяя теорему послѣдовательно къ каждому двумъ силамъ, безъ труда убѣдимся въ ея справедливости и для того общаго случая.

Такимъ образомъ теорема Вариньона применяется для сложения моментовъ произвольнаго числа силъ, какъ угодно расположенныхъ въ одной плоскости.

Задачи. 1. Показать, что моменты двухъ слагающихся силъ относительно точки, лежащей на направленіи ихъ равнодѣйствующей, равны по величинѣ и противоположны по направленію и, следовательно, взаимно уравновѣшиваются.

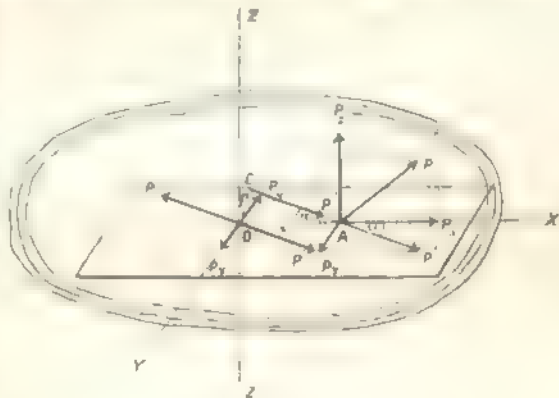
2. Показать, что алгебраическая сумма моментовъ силъ, составляющихъ пару, равна моменту пары относительно любой точки ея плоскости.

§ 133. **Моментъ силы относительно оси.** Чтобы распространить теорему Вариньона для моментовъ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, введено понятіе о моментѣ силы относительно оси. Происхождение этого понятія можетъ быть объяснено слѣдующимъ образомъ.

Предположимъ, что къ тѣлу, имѣющему неподвижную ось вращенія ZZ , приложена къ точкѣ A нѣкоторая сила P (фиг. 68). Если направленіе AP этой силы лежитъ въ одной плоскости съ осью ZZ , то дѣйствіе силы уничтожится сопротивленіемъ неподвижной оси; если же прямая AP и ZZ не лежатъ въ одной плоскости, то тѣло начнетъ вращаться около оси.

Чтобы опредѣлитъ ближе причину этого вращенія, разложимъ

силу P по правилу параллелепипеда на три взаимно перпендикулярныя слагающія P_x , P_y и P_z , такъ, чтобы P_x и P_y лежали въ плоскости XOY , перпендикулярной къ оси ZZ , причемъ P_x была бы направлена перпендикулярно къ оси, P_y была бы перпендикулярна къ плоскости, проходящей черезъ точку A и ось ZZ , а слагающая P_z была бы параллельна оси. Очевидно, что сила P_x стремится удалить тѣло отъ оси, а сила P_y — двигать тѣло вдоль оси, но такъ какъ ось неподвижна и неизмѣнно соединена съ тѣломъ, то обѣ эти силы уничтожаются сопротивленіемъ оси и никакого движенія не произведутъ. Остается только одна сила P_z . Если перенесемъ ее



Фиг. 68.

параллельно самой себѣ въ точку O пересѣченія оси ZZ съ перпендикулярной къ ней плоскостью, то получимъ силу P_x , дѣйствіе которой выразится только въ давленіи на ось, и пару (P_y, P_y) съ плечомъ $OA = r$, которая и будетъ вращать наше тѣло моментомъ $P_y \cdot r$.

Легко однако видѣть, что дѣйствіе этой пары равносильно дѣйствію пары (P'', P'') съ плечомъ $OC = r$, полученной при перенесеніи въ ту же точку O силы P'' равнодѣйствующей силѣ P_x и P_y и представляющей проекцію данной силы P на плоскость, перпендикулярную къ оси.

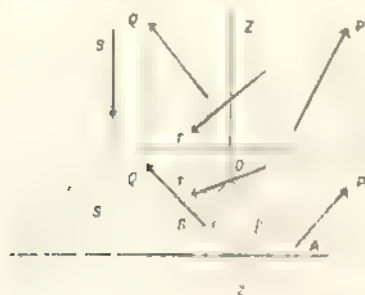
Дѣйствительно, такъ какъ $P_y = P' \sin \alpha$, а $OC = OA \sin \alpha$, откуда $\alpha = \frac{P}{\sin \alpha}$, то моментъ $P_y \cdot r = P' \sin \alpha \cdot \frac{P}{\sin \alpha} = P' \cdot r$.

Итакъ, причиной вращенія тѣла около оси можно считать моментъ пары, полученной отъ перенесенія проекціи данной силы на плоскость перпендикулярную къ оси, въ точку пересѣченія оси съ плоскостью. Моментъ этой пары и называется моментомъ силы P относительно оси, или иначе

Моментомъ силы относительно оси называется произведение изъ проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную къ оси, на кратчайшее расстояние отъ проекціи на ось, или еще иначе:

Моментъ силы относительно оси есть моментъ ея проекціи на плоскость, перпендикулярную къ оси, относительно точки пересѣченія оси съ плоскостью.

Такимъ образомъ (фиг. 69) моментъ силы P относительно оси ZZ есть произведение $P' \cdot OA = P' \cdot r$, а моментъ силы Q есть произведение $Q' \cdot OB = Q' \cdot q$. При этомъ, согласно принятому ранѣе условію, первый моментъ будемъ считать отрицательнымъ, а второй положительнымъ.



Фиг. 69

Если данная сила лежитъ въ одной плоскости съ осью, то моментъ ея относительно оси равенъ нулю. Дѣйстви-

тельно въ этомъ случаѣ сила, или 1) будетъ *параллельна* оси (напр. сила S), но тогда проекція ея обращается въ точку, или 2) будетъ *пересѣкаться съ осью* (напр. сила I), но тогда проекція ея пересѣчетъ ось и, слѣдовательно, плечо ея будетъ равно нулю.

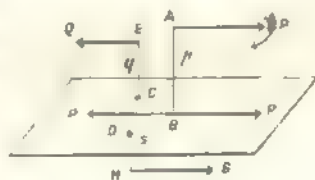
§ 134. **Теорема моментовъ силъ относительно оси.** Моментъ равнодействующей относительно *любой* оси равенъ алгебраической суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же самой оси.

Эта теорема, представляющая распространіе теоремы Вариньона для моментовъ силъ, не лежащихъ въ одной плоскости, доказывается точно такъ же, какъ эта послѣдняя (§ 132), для чего достаточно замѣтить, что

1) моменты силъ относительно оси представляютъ моменты ихъ проекцій относительно точки пересѣченія оси съ перпендикулярной къ ней плоскостью и

2) проекции параллельныхъ линій на плоскость параллельны между собой, такъ, что напр., проекція параллелограмма $DPKQ$ сходящихся силъ представляетъ также параллелограммъ $dprq$.

§ 135. **Моментъ силы относительно плоскости.** Если силу P перенесемъ на нѣкоторую *параллельную* ей плоскость (фиг. 70), то получимъ силу P и пару (P, P) съ плечомъ $AB = p$. Моментъ этой пары и называется **моментомъ силы относительно плоскости**. Другими словами, **моментъ силы относительно плоскости есть произведеніе величины силы на расстояние отъ точки A приложенія ея до этой плоскости**.

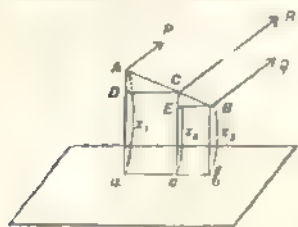


Фиг. 70.

Если сила стремится вращать свое плечо по направленію часовой стрѣлки, то моментъ ея относительно плоскости считается **положительнымъ**, а въ противномъ случаѣ **отрицательнымъ**. Поэтому моменты силъ (P и Q) направленныхъ въ разныя стороны, а также силъ (P и S), направленныхъ въ одну сторону, но лежащихъ по обѣ стороны плоскости моментовъ будутъ **противоположны по знаку**.

§ 136. **Теорема моментовъ параллельныхъ силъ относительно плоскости.** При сложеніи моментовъ параллельныхъ силъ относительно плоскости также имѣетъ силу теорема Вариньона

Моментъ равнодѣйствующей равенъ алгебраической суммѣ моментовъ, составляющихъ относительно одной и той же плоскости. Справедливость этой теоремы прямо слѣдуетъ изъ того что моменты такихъ силъ суть ничто иное какъ моменты паръ, лежащихъ въ одной плоскости или въ параллельныхъ плоско-



Фиг. 71.

стяхъ, а аналогичная теорема сложения такихъ паръ была уже доказана (§ 122).

Докажемъ, впрочемъ, эту теорему, независимо отъ теоремъ сложения паръ.

Положимъ, что даны двѣ параллельныя силы P и Q и равнодѣйствующая ихъ R , точки приложения ихъ пусть будутъ A , B и C , а плечи $Aa = z_1$, $Bb = z_2$ и $Cc = z_0$ (фиг. 71). Прове-

демъ прямыя BE и CD , параллельныя прямой ab .

Изъ сложения параллельныхъ силъ извѣстно, что

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AC}. \text{ По изъ подобныхъ } \triangle\text{-ковъ } BCE \text{ и } ACD \text{ имѣемъ,}$$

$$\text{что } \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{AD} = \frac{z_0 - z_1}{z_1 - z_0}. \text{ Итакъ}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{z_0 - z_1}{z_1 - z_0}, \text{ откуда } Pz_1 - Pz_0 = Qz_0 - Qz_1 \text{ или}$$

$$Pz_1 + Qz_2 = (P + Q)z_0 \text{ или наконецъ } Rz_0 = Pz_1 + Qz_2$$

Если моменты слагающихъ противоположны по знаку то точно такъ же доказывается, что $Rz_0 = Pz_1 - Qz_2$.

Если дано n параллельныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, то, складывая последовательно сперва двѣ изъ нихъ, затѣмъ равнодѣйствующую ихъ и 3-ю силу и т. д., безъ труда распространимъ нашу теорему на случай произвольнаго числа силъ.

Если дано n параллельныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ и разстоянія (координаты) ихъ отъ некоторой плоскости $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, то, обозначивъ разстояние отъ той же плоскости точки приложения равнодѣйствующей R черезъ x_0 , можемъ написать, что

$$Rx_0 = F_1x_1 + F_2x_2 + F_3x_3 + \dots + F_nx_n = \sum Fx,$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_nx_n}{R} = \frac{\sum Fx}{R},$$

или, замѣтивъ, что $R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F$,

$$x_0 = \frac{\sum Fx}{\sum F},$$

т-е разстояние точки приложенія равнодѣйствующей отъ плоскости моментовъ равно частному отъ дѣленія алгебраич. суммы моментовъ слагающихся на алгебраич. сумму слагающихся.

Примечаніе. Сложеніе моментовъ сходящихся силъ относительно плоскости представить, какъ легко видѣть, ничто иное, какъ сложение паръ, лежащихъ въ пересѣкающихся плоскостяхъ, и, следовательно, производится по правилу параллелограмма.

§ 137 Аналитическое опредѣленіе центра параллельныхъ силъ.

Положимъ, что дано n параллельныхъ силъ $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ (фиг. 72). Мы только что вывели, какъ опредѣляется положеніе

точки приложенія ихъ равно-

дѣйствующей или такъ назы-

ваемого центра параллель-

ныхъ силъ относительно ка-

кой-нибудь плоскости. Чтобы

найти положеніе этой точки

въ пространствѣ, надо опредѣ-

лить координаты (разстоянія)

ея отъ трехъ взаимно-перпен-

дикулярныхъ плоскостей, поло-

женіе которыхъ извѣстно. Про-

ведемъ три координатныя пло-

скости XOY, XOZ и YOZ такъ,

чтобы прямая OX пересѣченія первыхъ двухъ плоскостей была

параллельна общему направленію данныхъ силъ. Такимъ образомъ

эти силы будутъ одновременно параллельны плоскостямъ XOY и

XOZ . Называя координаты (разстоянія) слагающихся силъ

относительно плоскости XOY черезъ z_1, z_2, \dots, z_n

" " " XOZ " y_1, y_2, \dots, y_n

" " " YOZ " x_1, x_2, \dots, x_n

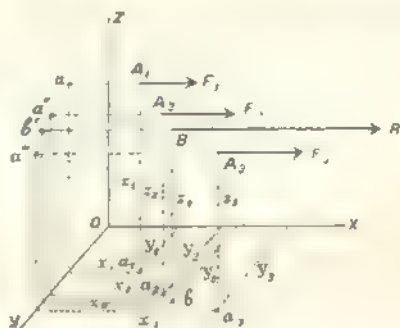
а координаты искомага центра параллельныхъ силъ черезъ $x_0,$

y_0 и z_0 , на основаніи теоремы моментовъ силъ относительно пло-

скостей XOY и XOZ можемъ написать равенства,

$$z_0 \cdot \sum F = F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n = \sum Fz \quad (1)$$

$$y_0 \cdot \sum F = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum Fy \quad (2)$$



Фиг. 72.

Поворотом слагающа $F_1, F_2 \dots F_n$ около ихъ точекъ приложения на 90° такъ, чтобы онѣ приняли положеніе параллельное плоскости YOZ , вѣдствие чего, какъ извѣстно, положеніе центра ихъ не измѣнится. Теперь мы можемъ написать относительно этой плоскости 3-ье уравненіе моментовъ

$$x_0 \sum F_i = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum F_i x_i \dots (3)$$

Изъ уравненій (1), (2), и (3) получимъ формулы, опредѣляющія положеніе центра параллельныхъ силъ

$$x_0 = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}; \quad y_0 = \frac{\sum F_i y_i}{\sum F_i}; \quad z_0 = \frac{\sum F_i z_i}{\sum F_i} \dots (4)$$

О центрѣ тяжести.

§ 138 Тяжестью или земнымъ притяженіемъ, какъ извѣстно, называется сила, заставляющая въ свободномъ земномъ предметѣ неподвижные самими собою, двигаться внизъ или падать съ постояннымъ ускореніемъ $g = 9,8 \text{ м.} = 32,2 \text{ ф.}$

Расдробивъ тѣло на множество мелкихъ частицъ, мы убѣждаемся, что эти частицы падаютъ совершенно такъ же, какъ цѣлое тѣло, и потому заключаемъ, что притяженіе земли дѣйствуетъ на *каждую* материальную частицу тѣла.

Н. равненіе силъ тяжести представляется *сложнымъ*, состоящимъ изъ многихъ ити, одинъ концы которыхъ неподвижно укрѣплены, а на другомъ концѣ подвѣшенъ грузъ. Подъ дѣйствіемъ тяжести грузъ нить вытягивается въ прямую линию по направленію, называемому *оптическимъ* или *вертикальнымъ*, которое и представляетъ направленіе силы тяжести.

Наблюденія показали, что вертикальное направленіе во всѣхъ точкахъ земного шара перпендикулярно или, правильнѣе сказать, *перпендикулярно* къ свободной поверхности жидкости, а такъ какъ свободная поверхность жидкости, разсматриваемой въ большихъ массахъ (моря, океаны), имѣетъ шарообразный видъ, то, принимая землю за правильный шаръ, можемъ заключить, что направленія силъ тяжести, приложенныхъ къ различнымъ тѣламъ или къ различнымъ точкамъ одного тѣла, пересекаются въ центрѣ земли*.)

* Это заключеніе только приближительно вѣрно, такъ какъ земля не есть правильный шаръ, а *сфероидъ* (шарообразное тѣло), сжатый у полюсовъ и растянутый у экватора.

Вследствие большой удаленности этой точки от земли по-
верхности (радиус земли приблизительно равенъ 6000 верстамъ)
и сравнительно малыхъ размеровъ земныхъ тѣлъ, углы, составлен-
ные направлениями силъ тяжести различныхъ частей тѣ одного и
того же тѣла, весьма малы. Такъ напр. радиусы, проведенные изъ
центра земли къ двумъ точкамъ, находящимся на земной поверх-
ности на расстоянии 1 метра одна отъ другой, составляютъ уголъ
въ 0,03" или въ $\frac{1}{10\,800\,000}$ часть прямого угла. Поэтому почти

безъ необходимости можно считать, что направления силъ тяжести
частей одного и того же тѣла параллельны между собою.

§ 139. **Центръ тяжести** Равнодѣствующая параллельныхъ силъ
тяжести вѣхъ частицъ одного и того же тѣла равна, какъ извѣ-
стно, суммѣ ихъ и представляетъ *вѣсъ* этого тѣла, точка же при-
ложенія этой равнодѣствующей или центръ параллельныхъ силъ
тяжести называется *центромъ тяжести* тѣла. Такимъ образомъ
можно считать, что вѣсъ всего тѣла сосре́доченъ въ его центрѣ
тяжести.

По свойству центра параллельныхъ силъ (§ 108) центръ тя-
жести тѣла находится въ одной определенной точкѣ и не
измѣняется при измѣненіи положенія самого тѣла *).

Приложивъ къ центру тяжести силу, равную и противополож-
ную его вѣсу, мы *равновесимъ* тѣло **) Отсюда слѣдуетъ,
что если подпереть или подвѣсить тѣло въ его центрѣ тяжести
то оно останется въ равновѣсіи при любомъ своемъ положеніи.
Точно также мы можемъ сдѣлать и обратное заключеніе, если изъ-
вая либо сила уравновѣшиваетъ тѣло, на которое не дѣйствуютъ
никакія другія силы кромѣ его собственнаго вѣса, то эта сила
испрямьно проходить черезъ центръ тяжести тѣла.

§ 140. **Центры тяжести объемовъ, поверхностей, площадей и
линій** Опредѣленіе положенія центровъ тяжести представляетъ

* Въ некоторыхъ случаяхъ (камень, полый шаръ и проч.) центръ тя-
жести предъставляетъ воображаемую точку, занимающую определенное поло-
женіе, но не связанную непосредственно съ тѣломъ.

** Этотъ фактъ, вѣроятно, и былъ первоначальнымъ поводомъ къ об-
новленію самаго слова *равновѣсіе*, принявшаго въ дѣйстви-
тельство болѣе общее значеніе.

одну изъ важнѣйшихъ задачъ механики, рѣшаемую, смотря по обстоятельствамъ вопроса, или аналитически, или геометрически, или, наконецъ, путемъ опыта. Для упрощенія мы будемъ опредѣлять центры тяжести *однородныхъ* тѣлъ, при чемъ замѣтимъ, что если одно измѣрениіе разсматриваемаго тѣла весьма мало сравнительно съ другими его измѣреніями (какъ напр. въ случаѣ тонкаго листа), то такое тѣло разсматриваютъ, какъ *материальную плоскость* или *поверхность*, а если два измѣренія тѣла очень малы, сравнительно съ третьимъ (напр., въ случаѣ тонкой проволоки), то такое тѣло разсматриваютъ, какъ *материальную линию*. Въ этомъ смыслѣ употребляютъ (хотя и не вполнѣ правильно) названія: *центры тяжести плоскостей, поверхностей, линій, периметры фигуры* и проч.

§ 141 **Аналитическое опредѣленіе центровъ тяжести.** Пусть $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ — вѣса частей, составляющихъ данное тѣло; $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ — координаты этихъ частицъ или ихъ центровъ тяжести (если эти части не очень малы), $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum p$ — вѣсъ всего тѣла и x_0, y_0, z_0 — координаты его центра тяжести относительно тѣхъ же самыхъ плоскостей YOZ, XOZ и XOY .

На основаніи теоремы моментовъ параллельныхъ силъ относительно плоскости имѣемъ, *моментъ вѣса всего тѣла относительно какой угодно плоскости равенъ суммѣ моментовъ вѣсовъ его частей относительно той же самой плоскости*

$$\text{т. е. } Px_0 = \sum px; Py_0 = \sum py; Pz_0 = \sum pz \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{\sum px}{P}; y_0 = \frac{\sum py}{P}; z_0 = \frac{\sum pz}{P} \dots \dots \dots (2)$$

Обозначивъ вѣсъ кубической единицы тѣла черезъ d , а объемомъ тѣла и его частей черезъ V, v_1, v_2, \dots, v_n , изъ ур-н (1) получимъ, что

$$Vdx_0 = \sum vdx; Vdy_0 = \sum vdy; Vdz_0 = \sum vdz$$

Выведемъ d какъ постояннаго множителя, за знакъ \sum и сокративъ на нечто полученія уравненія, будемъ имѣть.

$$Vx_0 = \sum vx; Vy_0 = \sum vy; Vz_0 = \sum vz, \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{\sum vx}{V}; y_0 = \frac{\sum vy}{V}; z_0 = \frac{\sum vz}{V} \dots \dots \dots (4)$$

Если тѣло разсматривается, какъ матеріальная поверхность, то, называя поверхность всего тѣла черезъ S , поверхности частей черезъ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, а вѣсъ 1 кв. единицы поверхности черезъ d' , изъ ур-ій (1) получимъ

$$Sd'x_0 = \sum s d'x; Sd'y_0 = \sum s d'y; Sd'z_0 = \sum s d'z \text{ или } \\ \text{послѣ упрощеній } Sx_0 = \sum sx; Sy_0 = \sum sy; Sz_0 = \sum sz, \dots \quad (3)$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{\sum sx}{S}; y_0 = \frac{\sum sy}{S}; z_0 = \frac{\sum sz}{S} \dots \dots \dots (6)$$

Наконецъ, если тѣло разсматривается, какъ матеріальная линія, и L — длина линіи, $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ — длины ея частей, а d'' вѣсъ 1 единицы длины, то изъ ур-ій (1) послѣ упрощеній получимъ

$$Lx_0 = \sum lx; Ly_0 = \sum ly; Lz_0 = \sum lz, \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{откуда } x_0 = \frac{\sum lx}{L}; y_0 = \frac{\sum ly}{L}; z_0 = \frac{\sum lz}{L} \dots \dots \dots (8)$$

Выраженія вида Vx, Sx, Lx , т.-е. произведенія изъ объема, поверхности или линіи на разстоянія ихъ центровъ тяжести до нѣкоторой плоскости называются (по аналогіи съ моментами силы) *моментами объема, поверхности (площади) или линіи относительно плоскости*. Поэтому уравненія (3), (5), (7) выражаютъ слѣдующую теорему:

Моментъ объема (поверхности или линіи) относительно плоскости равенъ суммѣ моментовъ объемовъ (поверхностей или линій) его частей относительно той же самой плоскости

§ 142. Если центры тяжести частей разсматриваемаго объема, поверхности или линіи лежатъ въ одной плоскости или на одной прямой, то, какъ это слѣдуетъ изъ сложенія параллельныхъ силъ, центръ тяжести всего объема, всей поверхности или всей линіи, такъ же лежитъ въ этой плоскости или на этой прямой

Поэтому, въ первомъ случаѣ для опредѣленія центра тяжести достаточно опредѣлить *одну* его координаты, т.-е. разстояніе его отъ *одной* взаимно перпендикулярныхъ осей, проведенныхъ въ этой плоскости, а во второмъ случаѣ, достаточно опредѣлять только *одну* координату, т.-е. разстояніе отъ одной точки, выбранной на этой прямой.

Въ этомъ смыслѣ и употребляютъ выраженія *моментъ объема, поверхности, площади или линіи относительно оси или точки*, и применяютъ уравненія (3), (5) и (7)

Примечание 1. Если въ уравнении (1) § 140

$$Px_0 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n$$

предположимъ, что всѣ отдѣльныя части, а слѣдовательно и всѣя ихъ равны между собою, т. е. что $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n$ и $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n = np$, то, написавъ это уравненіе въ такомъ видѣ,

$$px_0 = p(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n), \text{ получимъ, что}$$

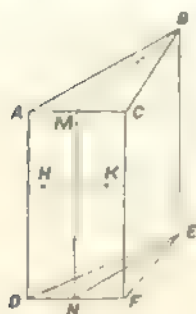
$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

т. е. разстояніе центра тяжести тѣла (а также поверхности, площади или линіи) до некоторой плоскости, оси или точки есть *средняя арифметическая* изъ разстояній равныхъ частей этого тѣла (поверхности, площади или линіи) до той же самой плоскости, оси или точки.

Вслѣдствіе этого замѣчательнаго свойства центра тяжести Пуансо называлъ его *центромъ среднихъ разстояній*.

Примечание 2. Такъ какъ всѣя, а слѣдовательно, и массу тѣла можно считать сосредоточенными въ его центрѣ тяжести, то Эйлеръ предлагалъ называть центръ тяжести *центромъ инерціи* тѣла.

§ 143. Геометрическія свойства центра тяжести. Рассмотримъ тѣла, имѣющія плоскость, ось или центръ симметріи.



Фиг. 73.

1 Если черезъ тѣло (какъ напр., черезъ изображенную на фиг. 73 непараллельно увеличенную треугольную призму) можно провести плоскость ($MNBE$), разсѣкающую его такъ, что для произвольныхъ точекъ (A, D, H, \dots), находящихся по одну сторону плоскости, имѣется по другую ее сторону соответственныя точки (C, F, K, \dots), лежащія попарно на одномъ перпендикулѣ къ плоскости и въ равномъ отъ нея удаленіи, то такая плоскость называется *плоскостью симметріи* тѣла.

Складывая попарно параллельныя силы тяжести, приложенныя къ соответственнымъ точкамъ тѣла, легко убѣдимся, что точки приложения ихъ равнодѣствующихъ лежатъ

въ плоскости симметріи, а слѣдовательно, и центръ тяжести тѣла лежитъ также въ этой плоскости.

II. Если черезъ тѣло могутъ быть проведены двѣ плоскости симметріи, то прямая пересѣченія ихъ называется *осью симметріи* тѣла. Очевидно, что центръ тяжести такого тѣла лежитъ на оси симметріи. Полезно замѣтить, что въ тѣлахъ вращенія ось вращенія есть вмѣстѣ и ось симметріи тѣла.

III. Если черезъ тѣло могутъ быть проведены три плоскости симметріи или, что все равно, двѣ оси симметріи, то точка пересѣченія ихъ называется *центромъ симметріи* тѣла. Центръ симметріи, очевидно, есть вмѣстѣ и центръ тяжести тѣла. На основаніи этихъ свойствъ непосредственно находимъ положеніе центровъ тяжести въ простѣйшихъ тѣлахъ, фигурахъ и линияхъ:

1. Центръ тяжести прямой лежитъ на ея серединѣ
2. Центры тяжести периметра или площади правильного многоугольника, круга, эллипса лежатъ въ ихъ геометрическихъ центрахъ.
3. Центры тяжести поверхности или объема правильного многогранника, шара, эллипсоида лежатъ въ ихъ геометрическихъ центрахъ.
4. Центры тяжести поверхности или объема правильной призмы и прямого цилиндра лежатъ въ серединѣ ихъ осей
5. Центры тяжести поверхности или объема правильной пирамиды и прямого конуса лежатъ на ихъ осяхъ

Примѣры опредѣленія центровъ тяжести.

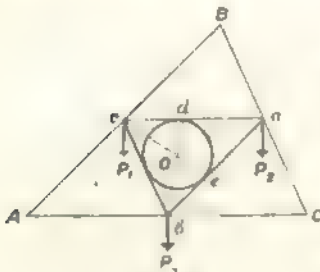
I. Центры тяжести линий.

§ 144. Центръ тяжести периметра треугольника. Положимъ, что данъ треугольникъ ABC (фиг. 74), составленный тремя прямыми: AB , BC и AC , вѣса которыхъ обозначимъ черезъ P_1 , P_2 и P_3 . Такъ какъ центры тяжести сторонъ лежатъ въ ихъ серединахъ c , a и b , то задача сводится къ опредѣленію центра 3-хъ параллельныхъ силъ P_1 , P_2 и P_3 , приложенныхъ къ этимъ точкамъ и соответственно пропорціональныхъ сторонамъ AB , BC и AC или вдвое меньшимъ ихъ сторонамъ ab , bc , ac треугольника abc .

Сложивъ силы P_1 и P_2 , найдемъ точку d приложенія ихъ равнодѣйствующей, опредѣливъ ее изъ пропорціи

$$\frac{dc}{da} = \frac{BC}{AB} \text{ или } \frac{dc}{da} = \frac{bc}{ab} \quad (1)$$

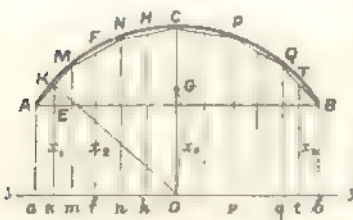
Искомый центръ тяжести лежитъ, очевидно, на прямой bd , соединяющей точку d съ точкой b приложенія силы P_3 . Но изъ пропорціи (1) по известной теоремѣ геометріи слѣдуетъ, что bd есть равнодѣлящая угла b треугольника abc .



Фиг. 74.

Если бы мы сложили сперва силы P_1 и P_2 и затѣмъ равнодѣйствующую ихъ съ силой P_3 , то точно такіе же разсужденія убѣдили бы, что искомый центръ тяжести лежитъ такъ же и на прямой ce , равнодѣлящей угла a . Итакъ центръ тяжести периметра треугольника лежитъ въ точкѣ O пересѣченія биссектрисъ или въ центрѣ круга, вписаннаго въ треугольникъ, вершины котораго лежатъ на серединахъ сторонъ даннаго треугольника.

§ 145. Центръ тяжести дуги AB круга (фиг. 75) лежитъ, очевидно, на радиусѣ OC , перпендикулярномъ къ хордѣ AB , какъ на



Фиг. 75.

оси симметріи дуги. Поэтому, чтобы найти положеніе этой точки, достаточно опредѣлить ея разстояніе отъ центра O . Раздѣлимъ дугу на нѣсколько (n) равныхъ частей и проведемъ хорды AM, MN, NC, \dots, QB . Центръ тяжести каждой изъ нихъ находится въ ея серединѣ

Назовемъ для краткости длину каждой хорды черезъ l , а длину всей ломаной $AMNC'PQB$ черезъ $L = nl$ и напишемъ уравненіе моментовъ всей ломаной и частей ея относительно діаметра YY' параллельнаго хордѣ AB :

$$Lx_0 = lx_1 + lx_2 + lx_3 + \dots + lx_n \quad (1)$$

откуда $x_0 = \frac{l(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)}{nl} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

Вторую часть уравнения (1) можно написать въ другомъ видѣ. Для этого, соединить центры O съ серединой K хорды AM , замѣтимъ изъ подобія \triangle -ковъ AME и OKE , что $\frac{AM}{OK} = \frac{AE}{KE}$ или

$$\frac{l}{OK} = \frac{AE}{KE}, \text{ откуда } lx_1 = OK \cdot AE = OK \cdot am$$

Такимъ же образомъ докажемъ, что $lx_2 = OK \cdot mn$
 $lx_3 = OK \cdot no$ и т. д.

Замѣнивъ въ уравнении (1) члены $lx_1, lx_2, lx_3, \dots, lx_n$ равными имъ выраженіями и взявъ OK за скобки, получимъ

$$Lx_0 = OK (am + mn + no + \dots + qb) \text{ или} \\ Lx_0 = OK \cdot ab = OK \cdot AB, \text{ откуда} \\ x_0 = \frac{OK \cdot AB}{L} \quad (2)$$

Эта формула опредѣляетъ разстояніе отъ точки O центра тяжести периметра части правильнаго вписаннаго многоугольника $AMNCPQB$.

Когда число сторонъ периметра возрастетъ до бѣзконечности, т. е. когда этотъ периметръ обратится въ дугу, то апогема OK обратится въ радиусъ R

$$\text{следовательно} \quad x_0 = \frac{R \cdot BA}{\widehat{AB}}, \quad (3)$$

гдѣ AB — длина хорды, а \widehat{AB} — длина дуги

Напишемъ эту формулу въ видѣ пропорціи

$$x_0 : R = AB : \widehat{AB}, \text{ т. е.}$$

разстояніе центра тяжести дуги отъ центра окружности есть четвертая пропорциональная между радиусомъ, синусомъ хорды и длиной дуги.

Примѣръ. Если дуга AB равна полуокружности, то

$$x_0 = \frac{R \cdot 2R}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R = \frac{7}{11} R$$

II. Центры тяжести поверхностей.

§ 146 Центр тяжести площади треугольника. Разделим площадь \triangle -ка ABC (фиг. 76) прямыми, параллельными стороне AC , на весьма большое число очень узких полос, которые можно рассматривать как материальные прямые. Центры тяжести этих прямых лежат на их серединах. Прямая, проходящая через все эти центры тяжести, есть очевидно, равнодѣльная (медiana) BM стороны AC . На ней, какъ в геометрическомъ мѣстѣ, центровъ тяжести всѣхъ элементарныхъ полосъ, лежитъ центръ тяжести площади треугольника.



фиг. 76.

Точно такимъ же разсужденіемъ найдемъ, что этотъ центръ тяжести лежитъ и на медианѣ CN стороны AB . Итакъ центръ тяжести G площади треугольника лежитъ въ пересѣченіи его медианъ.

Найдемъ вычисленіемъ мѣсто этой точки. Прямая MN , соединяющая середины сторонъ AB и AC , параллельна третьей сторонѣ BC и равна половинѣ ея. Поэтому $MN \parallel BC$ и $\triangle MNC \sim \triangle BCG$ и следовательно

$$\frac{MG}{BG} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}, \text{ т.-е. } MG = \frac{1}{2} BG \text{ или } MG = \frac{1}{3} BM,$$

т.-е. центръ тяжести треугольника лежитъ на $\frac{1}{3}$ медианы, считая отъ основанія.

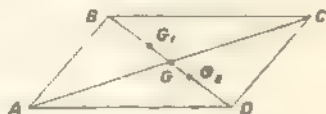
Полезно также замѣтить, что центръ тяжести треугольника состоитъ отъ основанія на $\frac{1}{3}$ высоты треугольника, что не трудно доказать.

Примѣчаніе Легко видѣть, что центръ тяжести треугольника совпадаетъ съ центромъ тяжести трехъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ A , B , C треугольника.

Дѣйствительно, точка приложенія равнодѣйствующей силъ A и C лежитъ въ точкѣ M — серединѣ прямой AE , а центръ

вѣсь 3-хъ силъ дѣлится на прямой BM въ точкѣ G , дѣлящей BM въ отношеніи 1:2.

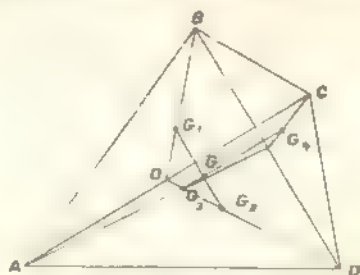
§ 147. **Центръ тяжести площади параллелограмма** (фиг. 77). лежитъ въ точкѣ пересѣченія его діагоналей. Дѣйствительно, разсматривая параллелограммъ $ABCD$, какъ сумму двухъ треугольниковъ ABC и ADC , легко замѣтимъ, что центры тяжести G_1 и G_2 этихъ треугольниковъ лежатъ на діагонали BD , представляющей ихъ общую медиану; центръ же тяжести всего параллелограмма, какъ точка приложенія равнодѣйствующей вѣсовъ равныхъ треугольниковъ, лежитъ на срединѣ G діагонали или, что все равно, въ пересѣченіи двухъ діагоналей.



Фиг. 77.

§ 148. **Центръ тяжести площади четырехугольника.**

1-й способъ. Чтобы опредѣлить центръ тяжести четырехугольника $ABCD$ (фиг. 78), разобьемъ его діагональю AC на треугольники ABC и ADC , проведемъ ихъ медианы BO и DO и раздѣливъ каждую изъ нихъ на 3 части, найдемъ центры тяжести G_1 и G_2 обоихъ треугольниковъ. Центръ тяжести даннаго четырехугольника $ABCD$ лежитъ, очевидно, на прямой G_1G_2 .



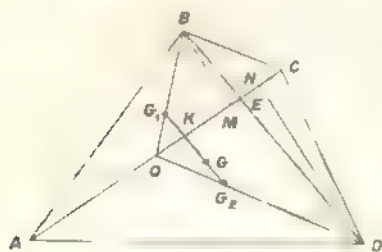
Фиг. 78.

Проведемъ теперь вторую діагональ BD и точно также опредѣлимъ центры тяжести G_3 и G_4 двухъ треугольниковъ ABD и CBD , а слѣдовательно, и прямую G_3G_4 , на которой лежитъ центръ тяжести четырехугольника. Итакъ, искомый центръ тяжести лежитъ на прямыхъ G_1G_2 и G_3G_4 , т.-е. лежитъ въ точкѣ G ихъ пересѣченія.

§ 149. *2-й способъ* (фиг. 79). Опредѣливъ, какъ только что показано, центры тяжести G_1 и G_2 треугольниковъ IBC и ADC , замѣтимъ точку K пересѣченія діагонали AC , съ прямою G_1G_2 и отложимъ отъ точки G_2 на G_1G_2 часть G_2G равную G_2K .

Полученная точка G и есть искомый центръ тяжести четырехугольника. Докажемъ это.

Искомый центр тяжести должен лежать на прямой G_1G_2 и притомъ въ точкѣ, дѣлящей эту прямую на части, обратно пропорціональныя величинамъ площадей \triangle -въ ABC и ADC , какъ



Фиг. 79.

это слѣдуетъ изъ сложения параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ G_1 и G_2 и пропорціональныхъ величинамъ площадей этихъ треугольниковъ. Площади \triangle -ковъ ABC и ADC , имѣющихъ общее основаніе AC , относятся какъ ихъ высоты BM и DN . Изъ подобныхъ \triangle -ковъ BME и DNE находимъ, что

$$\frac{BM}{DN} = \frac{BE}{DE} \quad (1)$$

$$\text{Но } \frac{BE}{DE} = \frac{G_1K}{G_2K} \quad \dots (2).$$

Дѣйствительно, \triangle -ки OBD и OG_1G_2 подобны, такъ какъ имѣютъ общій уголъ и $\frac{OG_1}{OB} = \frac{OG_2}{OD} = \frac{1}{3}$. Слѣдовательно, G_1G_2 параллельна BD , откуда

видимъ, что $\triangle OG_1K \sim \triangle OBE$, и слѣдовательно $\frac{G_1K}{BE} = \frac{OG_1}{OB} = \frac{1}{3}$.

Точно также $\triangle OG_2K \sim \triangle ODE$, откуда $\frac{G_2K}{DE} = \frac{OG_2}{OD} = \frac{1}{3}$.

Сравнивъ двѣ послѣднія пропорціи, находимъ, что

$$\frac{G_1K}{BE} = \frac{G_2K}{DE} \quad \text{или} \quad \frac{BE}{DE} = \frac{G_1K}{G_2K}.$$

Изъ пропорцій (1) и (2) имѣемъ

$$\frac{BM}{DN} = \frac{G_1K}{G_2K} \quad \text{или} \quad \frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{G_1K}{G_2K} \quad \dots (3).$$

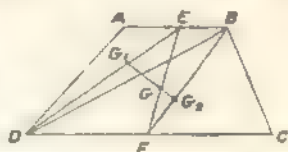
Но по построенію $G_1K = G_2G$ и $G_2K = G_1G$. Слѣдовательно

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADC} = \frac{G_2G}{G_1G},$$

что и слѣдовало доказать.

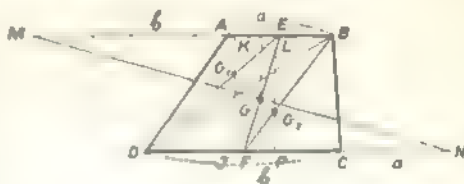
§ 150. Центр тяжести трапеціи можно опредѣлить или только что указанными построеніями, или другими способами, изъ которыхъ укажемъ здѣсь два наиболѣе употребительные.

1-ый способ. Центр тяжести трапеции $ABCD$ (фиг. 80) лежит на прямой EF , соединяющей середины ее оснований, так как эта прямая представляет геометрическое место центров тяжести элементарных полос, параллельных основаниям, на которые разбивается площадь трапеции. Но центр тяжести трапеции лежит также и на прямой G_1G_2 , соединяющей центры тяжести треугольников ABD и BDC , полученных при проведении диагонали BD . Итак, искомый центр тяжести лежит в точке G пересечения прямых EF и G_1G_2 .



Фиг. 80.

2-ой способ. Продолжим верхнее основание трапеции $AB=a$ (фиг. 81) на величину AM , равную нижнему основанию $DC=b$, а нижнее основание продолжим в противоположную сторону на величину CN , равную AB . Соединив точки M и N прямою MN , а также середины E и F обоих оснований прямою EF , найдем в пересечении этих прямых центр тяжести G трапеции.



Фиг. 81.

Для доказательства правильности построения, а также для определения искомого центра тяжести вычислением, разобьем трапецию на два треугольника ABD и BDC , найдем их центры тяжести G_1 и G_2 и воспользуемся теоремой моментов площадей их относительно оснований $AB=a$ и $DC=b$, причем расстояния центра тяжести трапеции от оснований будем обозначать через x_1 и x_2 .

Уравнение моментов площадей относительно AB

$$\triangle ABCD \cdot x_1 = \triangle ABD \cdot G_1K + \triangle BDC \cdot G_2L, \text{ или}$$

называя высоту трапеции через h и замѣтивъ, что $G_1K = \frac{h}{3}$, а

$$G_2L = \frac{2h}{3} :$$

$$\frac{(a+b)h}{2} \cdot x_1 = \frac{ah}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{2h}{3}, \text{ или}$$

$$(a+b)x_1 = \frac{(a+2b)h}{3}, \text{ откуда } x_1 = \frac{(a+2b)h}{3(a+b)}. \quad (1)$$

Уравнению моментов площадей относительно DC :

$$\triangle ABCD \cdot x_2 = \triangle ABD \cdot G_1 J + \triangle BDC \cdot G_2 P, \text{ или}$$

$$\frac{(a+b)h}{2} x_2 = \frac{ah}{2} \cdot \frac{2h}{3} + \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{3}, \text{ или}$$

$$(a+b)x_2 = \frac{(2a+b)h}{3}, \text{ откуда } x_2 = \frac{(2a+b)h}{3(a+b)}. \quad (2)$$

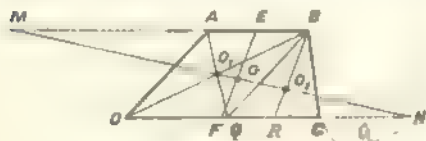
Разделив (1) на (2), получим:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a+2b}{2a+b}. \quad (3)$$

Но это же отношение получается из нашего построения, так как из подобных треугольников GME и GNF имеем:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{EM}{FN} = \frac{EA+AM}{FC+CN} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)}{\frac{1}{2}(h+a)} = \frac{a+2b}{2a+b}.$$

Примечание. Справедливость этого построения можно обнаружить, не пользуясь теоремой моментов, следующим образом. Проведем BQ параллельно AD (фиг. 82), разобьем трапецию на параллелограмм $ABQD$ и треугольник BQC . Найдем их центры тяжести O_1 и O_2 , и продолжим прямую O_1O_2 , на которой лежат иско-



Фиг. 82

мый центр тяжести, до пересечения с основаниями трапеции в точках M и N . Слѣдует доказать, что $AM = DC - b$ и $CN = AB = a$.

Из равенства \triangle -ков MBQ_1 и NDO_1 находим, что

$$AM + a = CN + b. \quad (4)$$

а из подобия \triangle -ков MBQ_2 и NRQ_2 , что

$$BN:BM = RO_2:BO_2 \text{ или } \left(\frac{h}{2} + a + CN\right) : (a + AM) = 1:2,$$

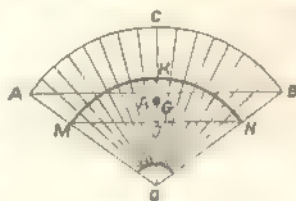
откуда
$$a + AM = 2\left(\frac{h}{2} + a + CN\right). \quad (5)$$

Приравнявъ другъ другу вторыя части уравнений (4) и (5), получимъ

$$CN + b = b - a + 2CN, \text{ откуда } CN = a \text{ и } AM = b.$$

§ 151. Центр тяжести неправильнаго многоугольника находятъ, разбивая его сперва на простѣйшія фигуры, напр., на треугольники, трапеціи, прямоугольники, и опредѣляя центры тяжести этихъ фигуръ, а затѣмъ по теоремѣ сложения параллельныхъ силъ или по теоремѣ моментовъ относительно прилично выбранныхъ осей или точекъ опредѣляя общій центръ тяжести совокупности этихъ фигуръ.

§ 152. Центръ тяжести круговаго сектора лежитъ, очевидно, на радіусѣ OC (фиг. 83), дѣлящемъ дугу AB сектора пополамъ, какъ на оси симметріи. Раздѣливъ радіусами секторъ AOB на весьма большое число узкихъ секторовъ, которые можно считать за треугольники, находимъ, что центры тяжести ихъ лежатъ на дугѣ MN , описанной изъ



Фиг. 83.

центра O радіусомъ $OM = \frac{2}{3} AO =$

$= \frac{2}{3} R$. Итакъ, вѣса вѣсхъ частей, составляющихъ данный секторъ,

какъ бы размѣщены по дугѣ MN , откуда понятно, что центръ тяжести сектора совпадаетъ съ центромъ тяжести этой дуги. Но

въ такомъ случаѣ, какъ было уже доказано, $OG = OM \frac{MN}{\widehat{MN}}$

Или, такъ какъ $OM = \frac{2}{3} R$; $\widehat{MN} = \frac{2}{3} \widehat{AB}$; $MN = \frac{2}{3} \widehat{AB}$, то

$$OG = \frac{2}{3} R \frac{AB}{\widehat{AB}}$$

Примѣръ. Если дуга $AB = \pi R$, т. е. полуокружности, то секторъ обращается въ половину круга и

$$OG = \frac{2}{3} R \frac{2R}{\pi R} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{14}{33} R.$$

§ 153. Центръ тяжести круговаго сегмента опредѣляется по теоремѣ моментовъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 83)

Назовемъ черезъ S , S_1 и S_2 площади сектора, треугольника и сегмента, а черезъ x , x_1 и x_2 разстоянія ихъ центровъ тяжести до центра O дуги. Тогда имѣемъ

$$Sx = S_1 x_1 + S_2 x_2 \text{ или } S_2 x_2 = Sx - S_1 x_1 \dots \dots \dots (I).$$

$$\text{Но } S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot R; x = \frac{2}{3} R \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}, \text{ откуда } Sx = \frac{1}{3} R^2 \cdot \overline{AB};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h; x_1 = \frac{2}{3} h, \text{ слѣдоват. } S_1 x_1 = \frac{1}{3} \overline{AB} \cdot h^2 = \frac{1}{3} \overline{AB} (R^2 - \frac{1}{4} \overline{AB}^2)$$

$$\text{Итакъ } S_2 x_2 = \frac{1}{3} R^2 \cdot \overline{AB} - \frac{1}{3} \overline{AB} (R^2 - \frac{1}{4} \overline{AB}^2) = \frac{1}{12} \overline{AB}^3$$

откуда

$$x_2 = \frac{\overline{AB}^2}{12 S_2} = \frac{1}{3} h$$

§ 154. Центры тяжести боковыхъ поверхностей правильной пирамиды и конуса лежатъ на $\frac{1}{3}$ ихъ осей, считая отъ основанія. Дѣйствительно, проведя сѣченіе, параллельное основанію пирамиды на разстояніи $\frac{1}{3}$ ея оси, замѣтимъ, что на серединахъ сторонъ его лежатъ центры тяжести треугольниковъ, образующихъ боковыя грани пирамиды. Отсюда понятно, что центръ тяжести боковой поверхности пирамиды совпадаетъ съ центромъ тяжести периметра многоугольника сѣченія, т.-е. лежитъ на $\frac{1}{3}$ высоты пирамиды.

Точно также докажемъ теорему относительно центра тяжести боковой поверхности конуса, рассматривая конусъ какъ пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ безконечно узкихъ граней.

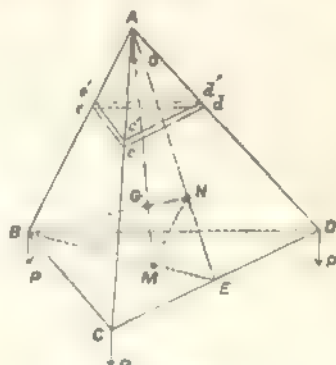
§ 155. Центры тяжести боковыхъ поверхностей шарового пояса и сегмента лежатъ на ихъ высотахъ, какъ на осяхъ симметріи. Проведи черезъ середину высоты h шарового пояса сѣченіе, параллельное его основанію, замѣтимъ, что оно раздѣлитъ данный поясъ на двѣ части съ равновеликими поверхностями $= 2\pi R \frac{h}{2} = \pi R h$, откуда заключаемъ, что центръ тяжести поверхности пояса лежитъ въ центрѣ этого сѣченія или на серединѣ высоты пояса.

Точно также доказывается, что центръ тяжести шарового сегмента лежитъ на серединѣ его высоты (или стрѣлки).

Примѣръ. Центръ тяжести поверхности полушара находится на серединѣ его радіуса.

III. Центры тяжести объемов.

§ 156. Центр тяжести треугольной пирамиды. Найдемъ центр тяжести M грани BCD данной пирамиды $ABCD$ (фиг. 84) и соединимъ эту точку съ вершиной A . Прямая AM , очевидно, представляетъ геометрическое мѣсто центровъ тяжести всѣхъ стѣенъ пирамиды, параллельныхъ грани BCD и представляющихъ подобныя ей треугольники.



Фиг. 84

Отсюда заключаемъ, что центр тяжести пирамиды лежитъ на прямой AM .

Опредѣливъ центр тяжести N грани ACD , точно такимъ же разсужденіемъ найдемъ, что центр тяжести пирамиды лежитъ на прямой BN .

Итакъ, центр тяжести пирамиды лежитъ въ точкѣ G пересѣченія прямыхъ AM и BN , лежащихъ въ одной плоскости ABE . Чтобы опредѣлить вычисленіемъ положеніе точки G , замѣтимъ, что

Δ -ки ABE и MNE подобны ($\angle E$ общій и $\frac{ME}{BE} = \frac{NE}{AE} = \frac{1}{3}$),

откуда находимъ, что MN параллельна AB и равна $\frac{1}{3}$ ей. Поэтому Δ -ки GMN и GAB также подобны и, следовательно

$$\frac{GM}{GA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$$

Итакъ, $GM = \frac{1}{3} AG$ или $GM = \frac{1}{4} AM$, т. е. центр тяжести треугольной пирамиды лежитъ на прямой, соединяющей вершину пирамиды съ центромъ тяжести основанія въ разстояніи $\frac{1}{4}$ этой прямой, считая отъ основанія.

Примѣчаніе. Центр тяжести треугольной пирамиды совпадаетъ съ центромъ 4-хъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ пирамиды. Дѣйствительно, центр тяже-

сти M треугольника BCD совпадаетъ съ центромъ 3-хъ равныхъ и параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ вершинамъ B , C и D (§ 146). Сложивъ равнодѣйствующую этихъ трехъ силъ съ 4-ой параллельной силой, приложенной въ вершинѣ A , находимъ, что общій центръ 4-хъ данныхъ силъ лежитъ на $\frac{1}{4}$ прямой AM , считая отъ основанія, что и слѣдовало доказать.

§ 157. Центры тяжести многоугольной пирамиды и конуса. Разбивъ многоугольную пирамиду діагональными плоскостями на треугольные пирамиды, найдемъ, что центры тяжести этихъ пирамидъ, а слѣдовательно, и центръ тяжести многоугольной пирамиды лежатъ въ плоскости, параллельной ея основанію и отстоящей отъ нея на $\frac{1}{4}$ высоты. Но вмѣстѣ съ тѣмъ очевидно, что искомымъ центръ тяжести лежитъ также на прямой, соединяющей вершину пирамиды съ центромъ тяжести основанія, такъ какъ эта прямая есть геометрическое мѣсто центровъ тяжести всѣхъ сѣченій пирамиды, параллельныхъ ея основанію. Итакъ, центръ тяжести многоугольной пирамиды, также какъ и треугольной, лежитъ на прямой, соединяющей вершину ея съ центромъ тяжести основанія въ разстояніи $\frac{1}{4}$ этой прямой, считая отъ основанія.

Доказанная теорема справедлива и для конуса, такъ какъ его можно разсматривать какъ пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ граней.

§ 158. Центръ тяжести объема шарового сектора (фиг. 83). Шаровой секторъ AOB можно представить какъ сумму безчисленнаго множества равныхъ элементарныхъ пирамидъ, основанія которыхъ лежатъ на шаровой поверхности сектора а вершины сходятся въ центръ шара. Но только что доказанному, центры тяжести каждой изъ этихъ пирамидъ лежатъ на разстояніи $\frac{3}{4}$ радиуса шара, считая отъ центра, или, что все равно, на поверхности шарового сегмента MKN , описаннаго изъ центра радиусомъ $= \frac{3}{4} R$. Отсюда понятно, что центръ тяжести G объема шарового сектора AOB совпадаетъ съ центромъ тяжести поверх-

ности сегмента MKN т.е. с серединой его высоты KJ равной $\frac{8}{1}$ высоты CD сектора.

Поэтому расстояние $OG = OK - \frac{KJ}{2} = \frac{3}{1} R - \frac{3}{2} h$ или

$$OG = \frac{3}{8} (2R - h)$$

§ 159 Центр тяжести тела произвольной формы находят, разбивая его сперва на такие части, определение центров тяжести которых известно (чаще всего на пирамиды), а затем применяя теорему моментов всего объема и частей его.

Если рассматриваемое тело не однородно, т.е. если оно состоит из частей с различной плотностью (напр., из дерева, металла и камня и т. п.), то, разделив его на однородные части, находят центр тяжести на основании теоремы моментов не только всего тела и частей его.

Пример 1. Определить центр тяжести тела, состоящего из чугунного шара и цилиндра и его центр, его верхняя и основания гравитационного шара (фиг. 85).

Диаметр основания цилиндра — диаметр шара — d сантим. Высота цилиндра — $2d$. Удельный вес гранита — 3, а чугуна — 7,5.

Очевидно, что центр тяжести тела лежит на прямой AB , представляющей его ось вращения. Определим расстояние x центра тяжести от центра A нижнего основания цилиндра, для чего составим уравнение моментов всех частей тела и двух его частей относительно точки A .

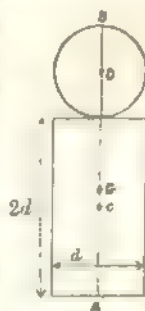
$$\text{Объем шара} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6} ; \text{вес его} = \frac{3\pi d^3}{6} = \frac{\pi d^3}{2} ;$$

расстояние от A его центра тяжести — $2d + \frac{1}{2}d = \frac{5}{2}d$ Вес цилиндра — $\frac{\pi d^2}{4} \cdot 2d \cdot 7,5 = 15 \frac{\pi d^3}{4}$, расстояние от A его центра тяжести — d .

$$\text{Поэтому } \left(\frac{\pi d^3}{2} + \frac{15\pi d^3}{4} \right) x = \frac{\pi d^3}{2} \cdot \frac{5d}{2} + \frac{15\pi d^3}{4} \cdot d \text{ или}$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{15}{4} \right) x = \frac{5}{4}d + \frac{15}{4}d \text{ или } 17x = 20d, \text{ откуда } x = 1 \frac{3}{17}d$$

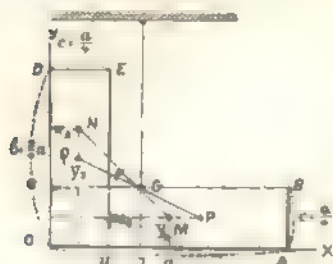
Пример 2. Найти центр тяжести тела (фиг. 86), состоящего из двух призм, соединенных под прямым углом. Разбьем тело пополам плоскостью симметрии, проходящей через высоты призм, и заметив, что все сечения тела, параллельные этой плоскости, равны между собою, находим, что вместо теоремы моментов объемов здесь возможно применить теорему моментов площадей сечения тела плоскостью симметрии.



Фиг. 85.

Пусть $OA = a$; $OD = b = \frac{3}{4}a$, $AB = DE = c = \frac{a}{4}$.

Проведемъ два взаимно перпендикулярныя оси OX и OY и составимъ относительно нихъ уравнения моментовъ площадей всего сѣченія и его частей, за которыя возьмемъ прямоугольники $OABC$ и $CDEF$.



Фиг. 86.

Площадь $OABC = ac = \frac{a^2}{4}$. Раз-

стоянія ея центра тяжести отъ осей OY и OX соответственно равны

$$x_1 = \frac{a}{2} \text{ и } y_1 = \frac{c}{2} = \frac{a}{8}.$$

Площадь $CDEF = (b - c) c =$
 $= \left(\frac{3}{4}a - \frac{1}{4}a \right) \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2}{8}$. Раз-

стоянія ея центровъ тяжести отъ OY

и OX равны $x_2 = \frac{c}{2} = \frac{a}{8}$

" $y_2 = OC + \frac{OD - OC}{2} = \frac{OD}{2} + \frac{OC}{2} = \frac{b + c}{2} = \frac{a}{2}$. Поэтому

уравненіе моментовъ относительно OY :

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} \right) x = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} x = \frac{a}{2} + \frac{a}{16}$$

или $3x = \frac{9}{8}a$, откуда $x = \frac{3}{8}a$.

Уравненіе моментовъ относительно OX :

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} \right) y = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{8} + \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} y = \frac{a}{8} + \frac{a}{4}$$

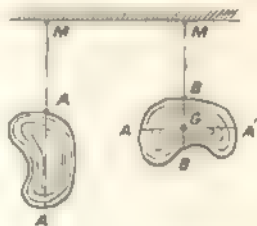
или $3y = \frac{3}{4}a$, откуда $y = \frac{1}{4}a$.

Отложивъ по оси OX отрезокъ $OJ = x = \frac{3}{8}a$, а по оси OY отрезокъ $OK = y = \frac{1}{4}a$ и возставивъ изъ точекъ J и K перпендикуляры къ

осямъ, получимъ въ пересѣченіи ихъ точку G — искомый центръ тяжести нашего сѣченія, а следовательно, и всего тѣла. Подвѣсивъ наше тѣло въ точкѣ G , увидимъ, что оно будетъ находиться въ равновѣсіи въ любомъ своемъ положеніи.

Центръ тяжести G легко найти и построениемъ. Для этого достаточно провести прямую MN , соединяющую центры тяжести прямоугольниковъ $OABC$ и $CDEF$, а затѣмъ прямую PQ , соединяющую центры тяжести двухъ другихъ прямоугольниковъ $ABFH$ и $ODEH$, образующихъ нашу фигуру. Въ пересѣченіи прямыхъ MN и PQ получимъ ту же самую точку G .

§ 160. **Определение центра тяжести путем опыта.** I. Рассмотрим вѣсомое тѣло подвѣсивъ въ какой нибудь точкѣ A его (фиг. 87) посредствомъ нити или тонкой проволоки къ неподвижной точкѣ M . Когда тѣло придетъ въ положеніе покоя (равновѣсія), то проводя по нему черту AA' , составляющую продолженіе вертикальнаго направленія нити AM . Центръ тяжести тѣла лежитъ на прямой AA' , такъ какъ при равновѣсіи центръ тяжести, какъ точка приложенія равнодѣйствующей силы тяжести, очевидно, должна находиться на одной вертикали съ неподвижной точкой. Подвѣсивъ тѣло въ другой его точкѣ B , точно также находить, что покойный центръ тяжести лежитъ на прямой BB' , составляющей продолженіе вертикали BM . Итакъ, центръ тяжести тѣла находится въ точкѣ G пересѣченія прямыхъ AA' и BB' .



Фиг. 87.

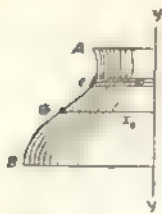
II Устанавливаютъ тѣло въ равновѣсіи на остромъ ребрѣ какого нибудь бруска. Центръ тяжести тѣла, очевидно, лежитъ въ вертикальной плоскости, проходящей черезъ это ребро. Перевернувъ тѣло и установивъ его въ равновѣсіи на томъ же ребрѣ въ новыхъ положеніяхъ еще два раза, находятъ еще двѣ плоскости, въ которыхъ лежитъ центръ тяжести, положеніе котораго окончательно опредѣлится, какъ точки пересѣченія трехъ найденныхъ плоскостей.

Теоремы Гюльдена.

§ 161. Ученіе о центрѣ тяжести позволяетъ вывести двѣ замѣчательныя геометрическія теоремы, при помощи которыхъ опредѣляются поверхности и объемы тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія линій и площадей какого угодно вида около оси, лежащихъ съ ними въ одной плоскости. Эти теоремы были первоначально открыты древнимъ геометромъ Паппомъ, но затѣмъ потеряны и вторично открыты ученымъ монахомъ Гюльденомъ.

I. Поверхность тѣла вращенія равна произведенію изъ длины образующей линіи на окружность, описанную ей центромъ тяжести.

Положимъ (фиг. 88), что линия $AB = L$ вращается около оси YY , описывая некоторую поверхность. Разобьемъ AB на множество элементарныхъ отрезковъ, которые по малости можно считать прямыми. Поверхность, полученная отъ вращения каждаго изъ такихъ отрезковъ, напр., $ab = l$, какъ поверхность усѣченного конуса, равна произведению длины окружности среднего сѣчения на образующую, т.-е. $s = 2\pi x l$, гдѣ x есть расстояние отъ оси середины или, что все равно, центра тяжести отрезка.



Фиг. 88.

Полная поверхность вращения S равна суммѣ такихъ элементарныхъ поверхностей, т.-е. $S = \sum s = \sum 2\pi x l$ или, по выведеніи изъ знака \sum постоянныхъ множителей:

$$S = 2\pi \sum l x \dots \dots \dots (1).$$

Но выраженіе $\sum l x$ представляетъ суммъ моментовъ элементарныхъ линій относительно оси YY , которая, какъ извѣстно, равна моменту всей образующей линіи относительно той же оси, т.-е.

$$\sum l x = L x_0, \dots \dots \dots (2).$$

гдѣ x_0 —расстояніе центра тяжести прямой $AB = L$ отъ оси.

Итакъ

$$S = 2\pi x_0 L \dots \dots \dots (3).$$

II. Объемъ тѣла вращенія равенъ произведенію площади образующей на окружность, описанную ея центромъ тяжести.

Найдемъ объемъ кольцеобразнаго тѣла, полученнаго при вращеніи площади $ABCD$ около оси YY (фиг. 89). Разобьемъ образующую площадь на элементарные прямоугольники вида



Фиг. 89.

$abcd =$ Назовемъ черезъ r_1 и r_2 — расстоянія am и bm , черезъ h — длину ad и черезъ x и x_0 — расстоянія центровъ тяжести площадей $abcd$ и $ABCD$ отъ оси. (Объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія элем. прямоугольника $abcd$, представляетъ объемъ полого цилиндра, потому что $v = \pi h (r_1^2 - r_2^2) = \pi h (r_1 - r_2)(r_1 + r_2)$.

Но $h(r_1 - r_2) = ad \cdot ab = s$, а $r_1 + r_2 = 2x$ (такъ какъ $x = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 + r_2}{2}$).

Поэтому

$$v = 2\pi x \cdot s.$$

Объемъ всего тѣла вращенія $V = \sum v = \sum 2\pi x s$ или

$$V = 2\pi \sum s x \dots \dots \dots (4).$$

Но Σx , какъ сумма моментовъ элементарныхъ площадей относительно оси, равна моменту всей площади $ABCD$ S относительно той же оси, т.-е.

$$\Sigma x = Sx_0 \dots \dots \dots (5)$$

Изъ (4) и (5) получаемъ $V = 2\pi x_0 S \dots \dots \dots (6)$

Примѣръ. Найдёмъ поверхность и объёмъ круглаго кольца (такъ называемаго *тора*), полученнаго при вращеніи круга около оси, если радиусъ круга $= r$, а разстояніе его центра отъ оси $= R$.

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr, \quad V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2$$

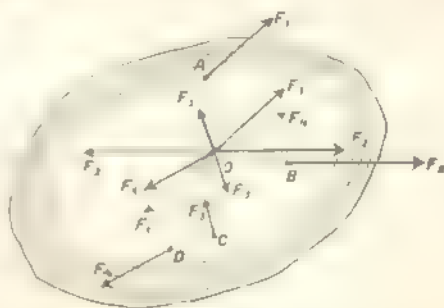
Задачи. Проверить по теоремѣ Гюльдена извѣстныя формулы поверхностей и объёмовъ 1) цилиндра, 2) конуса, 3) шара.

Равновѣсіе тѣлъ.

Равновѣсіе свободного твердаго тѣла

§ 162. **Сложеніе системы силъ какъ угодно приложенныхъ къ твердому тѣлу.** Вообразимъ, что къ нѣкоторому свободному твердому тѣлу въ различныхъ его точкахъ приложены силы $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, дѣйствующія по различнымъ направленіямъ и лежащія въ различныхъ плоскостяхъ (фиг. 90).

Перенесемъ одну изъ этихъ силъ, напр. F_1 , параллельно самой себѣ въ произвольно выбранную точку O тѣла. Какъ извѣстно, при этомъ получится сила F_1 , приложенная въ точкѣ O и пара (F_1, F'_1) , лежащая въ плоскости, проходящей черезъ точку O и направленіе силы F_1 . Сдѣлавъ тоже



Фиг. 90.

самое со всѣми остальными силами F_2, F_3, \dots, F_n , получимъ систему силъ, сходящихся пучкомъ въ точкѣ O и систему паръ $(F_1, F'_1), (F_2, F'_2), (F_3, F'_3) \dots$, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, при чемъ всѣ эти плоскости пересекаются между собой въ точкѣ O .

Сложивъ по правилу многоугольника всѣ сходящіяся силы, а также всѣ полученныя пары (для чего всего удобнее предвари-тельно изобразить ихъ осами), получимъ одну равнодѣствующую силу R и одну равнодѣствующую пару, моментъ которой обозна-чимъ черезъ G .

Положеніе произвольно выбранной точки O , называемой *центромъ приведения* не имѣетъ значенія ни для величины, ни для направленія равнодѣствующей силы R . Это прямо слѣдуетъ изъ того, что при параллельномъ перенесеніи силъ въ какую угодно точку мы не имѣемъ ни величины, ни направленія ихъ.

Недѣзя, однако, сказать того же про величину и положеніе равнодѣствующей пары при выборѣ различныхъ центровъ приве-денія плоскости слагающихъ паръ будутъ принимать различные положенія и, слѣдовательно, складывая эти пары, мы будемъ по-лучать равнодѣствующие пары, отличающіяся одна отъ другой какъ по величинѣ, такъ и по положенію своихъ плоскостей.

Вообще, въ зависимости отъ выбора того или другого центра приведенія, плоскость равнодѣствующей пары будетъ пересѣкать направленіе равнодѣствующей силы R подъ различными углами. Въ частномъ случаѣ, о которомъ будемъ еще говорить, плоскость пары G можетъ проходить черезъ направленіе силы R .

Итакъ, сколько бы къ твердому тѣлу ни было приложено силъ и каковы бы ни были ихъ величины и направленія, всегда воз-можно привести всѣ эти силы къ одной силѣ и къ одной парѣ, лежащихъ, вообще говоря, въ различныхъ плоскостяхъ.

§ 163. **Центральная ось системы паръ.** Между различными точками тѣла, каждую изъ которыхъ можно принимать за центръ приведенія, существуетъ рядъ точекъ, лежащихъ на одной прямой, обладающихъ слѣдующими замѣча-тельными свойствами:

При перенесеніи всѣхъ приложенныхъ къ тѣлу силъ въ какую либо изъ этихъ точекъ

1) плоскость равнодѣствующей пары будетъ перпендикулярна къ направ-ленію равнодѣствующей силы;

2) величина момента этой равнодѣствующей пары будетъ *минимальна* (минимумъ) по сравнению съ величинами моментовъ равнодѣствующихъ паръ, полученныхъ при перенесеніи силъ въ каки-либо другія точки тѣла.

Доказательство 1 Положимъ, что мы приведемъ дѣствующія на тѣло силы къ одной силѣ R , приложенной въ точкѣ A и къ одной парѣ G . Раз-ложимъ эту пару по правилу параллелограмма на двѣ слагающія: на пару съ моментомъ $Rr = G'$, лежащую въ плоскости, перпендикулярной къ силѣ R , и

пары съ моментом $Qq = Cr''$, лежащую въ плоскости, проходящей через направление силы R (фиг. 91).

Перенесемъ силу R параллельно самой себѣ въ точку O , отстоящую отъ прямой AB на расстоянии $= \frac{Q}{R}$ и въ такомъ направленіи, чтобы получилась при этомъ пара съ моментомъ $Rr = Qq$ была противоположна по направлению разбе полученной парѣ съ моментомъ Qq . Тогда эти пары, какъ равныя, противоположны и лежащія въ одной плоскости, взаимно уничтожаются и, следовательно, останется одна сила R , приложенная въ точкѣ O , и одна пара $Pp = Cr'$, лежащая въ плоскости, перпендикулярной къ направлению силы.

Очевидно, что, перенеся центръ приведенія въ точки O въ точки O' , O'' , O''' , лежащія на прямой OR , мы имѣемъ не измѣнивши бы полученной совокупности силы R и пары Cr' , такъ какъ при этомъ сила переносится бы по сеи направлению и при перемѣнѣ ея бы параллельно самой себѣ.

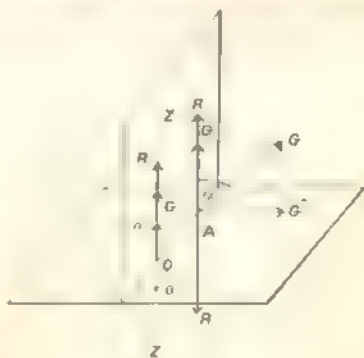
Наоборотъ, если силу R перенесемъ параллельно самой себѣ въ любую другую точку, лежащую вне прямой OR и отстоящую отъ нея на некоторомъ расстоянии (с. г.), то получимъ другую пару Rr съ прежней парой Pp , и получимъ новую пару, вѣдущую отъ которой, понятно, уже не будетъ перпендикулярна къ направлению силы R . Такъ какъ эта пара получается отъ сложения паръ, лежащихъ въ взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, то моментъ ея всегда будетъ больше момента пары $Pp = Cr'$. Такимъ образомъ пара Cr' , перпендикулярная къ силѣ R , представляетъ наименьшую пару изъ всѣхъ паръ, получающихся при сложении произвольной системы силъ.

Прямая OR , представляющая геометрическое мѣсто центровъ приведенія паръ съ наименьшимъ моментомъ, по предложенію Пуансо, получила названіе *центральной оси системы паръ*.

Доказательство 2. Положимъ, что всѣ силы приведены въ точкѣ A къ равнодѣйствующей силѣ R и равнодѣйствующей парѣ, изображенной ея осью G (фиг. 92). Разложимъ по правилу параллелограмма пару G на двѣ составляющія пары съ осями (и моментами) G' и G'' , изъ которыхъ первая совпадала бы съ направлениемъ силы R , а вторая была бы перпендикулярна къ этой силѣ. Повернемъ пару G'' въ ея плоскости такъ, чтобы одна изъ силъ ея приняла положеніе прямопротивоположное силѣ R и имѣ-



Фиг. 91.



Фиг. 92.

силы заѣмъ эту пару другою съ равнымъ моментомъ ($R \cdot O_1A$), и съ силами равными R .

Тогда двѣ равныя и противоположныя силы R взаимно уничтожаются и останется только сила R , приложенная въ точкѣ O , и пара съ осью O_1O' , которую можно перенести параллельно самой себѣ въ точку O до совпаденія съ силой R .

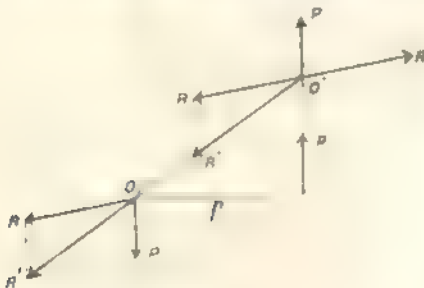
Очевидно, что силу R и ось пары O_1O' можно перенести безъ всякаго измѣненія въ любую точку центральной оси ZZ . Но если силу R перенесемъ параллельно самой себѣ въ какую-либо точку, не лежащую на оси ZZ , то получившаяся при этомъ пара, будучи сложивъ съ прежней парой O_1O' , дастъ пару съ моментомъ большимъ чѣмъ G' .

Итакъ, пара G' есть наименьшая пара. Нетрудно видѣть, что можеть возникнуть пара G'' *любою*, гдѣ G'' — каждаго рода равнодѣйствующая пара, и α'' — уголъ, образуемый ею осью съ центральной осью системы паръ.

Равнодѣйствующая сила R и ось G'' равнодѣйствующей пары, перпендикулярной къ ея направленію, совпадаютъ въ одну прямую. Такая совокупность силы и пары называется *динамою* или *силовымъ моментомъ*. Подъ этимъ названіемъ объясняются тѣмъ, что при винчиваніи винта, буравца и проч., мы действуемъ одновременно силой, идущей по оси винта и вращающей его поступательно, и парой, вращающей винтъ въ плоскости, перпендикулярной къ его оси.

§ 164. Частные случаи сложенія произвольной системы силъ.

1. Приведеніе къ одной равнодѣйствующей силѣ. Если по приведенію всѣхъ силъ къ одной силѣ R и парѣ G окажется, что они лежатъ въ одной плоскости, то такую систему *всего можно привести къ одной равнодѣйствующей силѣ*, равной по величинѣ и направленію силѣ R , но приложенной къ другой точкѣ.



Фиг. 93.

Дѣйствительно, сложивъ силу R съ одною изъ силъ P пары $G=Pr$ (фиг. 93), получимъ равнодѣйствующую R' . Перенесемъ эту силу по ея направленію до пересѣченія въ точкѣ O съ второю силой P пары и сложивъ эти силы, получимъ окончательную равнодѣйствующую R'' , равную и

параллельную силѣ R . Тотъ же самый результатъ можно было получить и другимъ путемъ, а именно, перенесемъ силу R въ такую точку O' , чтобы образовавшаяся при этомъ пара (R, R'

была равна по величинѣ и противоположна по направленію парѣ Pp . Тогда обѣ эти пары взаимно уничтожаются и получается одна сила R , приложенная въ точкѣ O .

Примечаніе. Въ общемъ случаѣ, когда равнодѣйствующая сила R и равнодѣйствующая пара $G = Pp$ не лежатъ въ одной плоскости, такую систему можно всегда привести въ одну систему, не лежащую въ одной плоскости. Дѣйствительно, сложивъ силу R съ первой силой P пары, получимъ равнодѣйствующую R' , лежащую въ другой плоскости, чѣмъ сила P , а, следовательно, не перекрывающуюся со второй силой P пары. Итакъ, данная система силъ приводится съ двумя силами R' и P , не лежащими въ одной плоскости и потому не складывающимися въ одну равнодѣйствующую.

II. Приведеніе къ одной равнодѣйствующей парѣ. Если всѣ силы, перенесенныя въ центръ приведенія, взаимно уничтожаются, т.-е. если равнодѣйствующая ихъ $R = 0$, сложившись при этомъ пары не уничтожаются, то сложивъ ихъ, получимъ одну равнодѣйствующую пару G .

§ 165. **Условія равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.** Такъ какъ система силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу, въ общемъ случаѣ приводится къ одной равнодѣйствующей силѣ R и одной равнодѣйствующей парѣ G , то, очевидно, что это тѣло одновременно побуждается равнодѣйствующей силой къ поступательному движенію по ея направленію и равнодѣйствующей парой къ вращательному движенію въ плоскости этой пары *) Следовательно, условія равновѣсія свободнаго тѣла, очевидно, состоятъ въ томъ, что одновременно, какъ равнодѣйствующая сила, такъ и моментъ равнодѣйствующей пары должны равняться нулю, т.-е.

$$R = 0 \text{ и } G = 0. \quad (1).$$

Иными словами, для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы какъ силы, перенесенныя параллельно самимъ собою въ одну

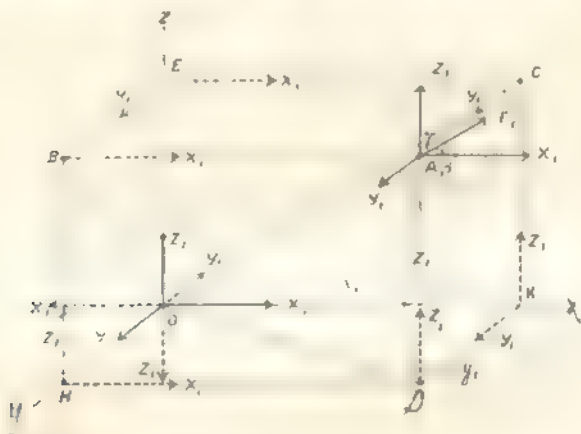
*. Отсюда никакъ нельзя вывести того заключенія, что, если въ вѣ силы приведены къ одной точкѣ равнодѣйствующими, то тѣло непременно получитъ одно или нѣсколько движеній по направленію этой силы. Наоборотъ, изъ динамики будетъ извѣстно, что каждая сила, если только она не продолжена къ центру инерціи (центру тяжести) свободнаго тѣла раздѣлится на силу и пару, и сдвинетъ тѣло и временно поступательно и вращательно движется.

точку, взаимно уничтожались, такъ и получившіеся при этомъ пары также взаимно уничтожались.

Выражая эти же условия геометрически, можемъ сказать, что для равновѣсія свободнаго твердаго тѣла необходимо и достаточно, чтобы многоугольникъ составляющихъ силъ и многоугольникъ осей составляющихъ паръ замыкались сами собою.

Выразимъ теперь условія равновѣсія аналитически.

§ 166 Аналитическое опредѣленіе условій равновѣсія Положимъ, что къ нѣкоторому свободному твердому тѣлу приложено въ различныхъ его точкахъ n различныхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n . Проведемъ изъ произвольно взятой точки O этого тѣла три взаимно перпендикулярныя оси координатъ OX, OY и OZ (фиг. 94). Пусть ко-



XOY . Наконецъ перенесъ всё эти силы въ начало O координатъ, получимъ въ этой точкѣ три силы X_1, Y_1, Z_1 и три пары: (X_1, X_1) съ плечомъ OB_1 , (Y_1, Y_1) съ плечомъ OC и (Z_1, Z_1) съ плечомъ OD *).

Разложимъ пару (X_1, X_1) по правилу параллелограмма на двѣ слагающія: пару (X_1, X_1) съ плечомъ $OE = x_1$, лежащую въ плоскости XOZ и пару (X_1, X_1) съ плечомъ $OH = y_1$, лежащую въ плоскости XOY . Принимая во вниманіе направленія вращения этихъ паръ, найдемъ, что моменты ихъ будутъ X_1x_1 и X_1y_1 .

Точно также разложимъ вторую пару (Y_1, Y_1) на двѣ слагающія: пару (Y_1, Y_1) въ плоскости XOY съ плечомъ $OK = x_1$ и пару (Y_1, Y_1) въ плоскости YOZ съ плечомъ $OE = y_1$. Моменты этихъ паръ равны Y_1x_1 и Y_1y_1 .

Наконецъ разложимъ третью пару (Z_1, Z_1) на слагающія: пару (Z_1, Z_1) въ плоскости XOZ съ плечомъ $OK = x_1$ и моментомъ — Z_1x_1 и пару (Z_1, Z_1) въ плоскости YOZ съ плечомъ $OH = y_1$ и моментомъ Z_1y_1 .

Такимъ образомъ въ каждой изъ координатныхъ плоскостей получаются по двѣ пары. Сложивъ ихъ, получимъ:

въ плоскости	YOZ	пару съ моментомъ	$Z_1y_1 - Y_1x_1$;
"	"	XOZ	" " " $X_1x_1 - Z_1x_1$;
"	"	XOY	" " " $Y_1x_1 - X_1y_1$.

Сдѣлавъ тоже самое съ каждою изъ остальныхъ силъ F_2, F_3, \dots, F_n , найдемъ совершенно подобныя же выраженія для составляющихъ силъ, сходящихся въ точкѣ O , и для составляющихъ паръ, расположенныхъ въ координатныхъ плоскостяхъ.

Сложивъ всё силы, направленные по каждой изъ осей, а также всё пары, лежащія въ каждой изъ координатныхъ плоскостей, получимъ три силы:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n &= \Sigma X = \Sigma F \cos \alpha, \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n &= \Sigma Y = \Sigma F \cos \beta, \\ Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n &= \Sigma Z = \Sigma F \cos \gamma, \end{aligned}$$

*) Очевидно, что плечи OB, OC и OD , какъ двѣ стороны грани параллелепипеда, соответственно перпендикулярны его ребрамъ, по которымъ направлены силы X_1, Y_1 и Z_1 .

три пары:

$$G_x = \Sigma (Zy - Yz); \quad G_y = \Sigma (Xz - Zx); \quad G_z = \Sigma (Yx - Xy)^*.$$

Наконец, сложив по правилу параллелограмма эти послѣдніе силы и пары, найдемъ слѣдующія выраженія для равнодѣйствующей силы R и момента G равнодѣйствующей пары

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$$

$$G = \sqrt{[\Sigma (Zy - Yz)]^2 + [\Sigma (Xz - Zx)]^2 + [\Sigma (Yx - Xy)]^2}.$$

Такимъ образомъ, какъ легко видѣть, изъ основныхъ условій равновѣсія $R = 0$ и $G = 0$, непосредственно вытекаютъ (*) шесть уравненій:

$$\Sigma X = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma (Zy - Yz) = 0 \quad (4).$$

$$\Sigma Y = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma (Xz - Zx) = 0 \quad (5).$$

$$\Sigma Z = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma (Yx - Xy) = 0 \quad (6).$$

Эти уравненія и называются *основными уравненіями равновѣсія* свободнаго твердаго тѣла.

§ 167. Другой видъ уравненій равновѣсія

Уравненіямъ равновѣсія часто даютъ другой видъ болѣе удобный для запоминанія и для примѣненія. Для этого замѣнимъ выраженія ΣX , ΣY и ΣZ , т. е. суммы проекцій приложенныхъ силъ F_1, F_2, \dots, F_n на оси координатъ равнодѣйствующими имъ выраженіями $\Sigma F'_x$, $\Sigma F'_y$ и $\Sigma F'_z$, а затѣмъ докажемъ, что уравненія (4), (5) и (6) представляютъ ничто иное какъ *суммы моментовъ приложенныхъ силъ относительно осей координатъ*. Действительно, принявъ во вниманіе, что моменты равнодѣйствующей относительно того-либо оси равны суммѣ моментовъ составляющихъ относительно той же

*) Для облегченія составленія выраженій осей паръ G_x , G_y и G_z рекомендуется слѣдующій примѣ. Размѣстимъ въ видѣ треугольника большія и малыя

буквы такимъ образомъ $\begin{matrix} & Y & \\ X & & Z \\ & Z & Y \end{matrix}$. Для составленія выраженія G_x возьмемъ большую букву, предшествующую X , считая по направленію движенія часовой стрѣлки, т. е. Z (силу), а затѣмъ малую букву, предшествующую Z , т. е. y (координату). Выраженіе Zy представляетъ 1-ую часть момента пары G_x . Вторая часть (со знакомъ —) состоитъ изъ тѣхъ же буквъ, но въ обратномъ порядкѣ. Итакъ $G_x = Zy - Yz$. Точно также составятся выраженія для G_y и G_z .

**. Такъ какъ сумма квадратовъ алгебраическихъ количествъ только тогда равна нулю, когда сами эти количества попарно равны нулю.

самой оси, составимъ выраженія моментовъ силы F_1 , какъ равнодѣйствующей силъ X_1 , Y_1 и Z_1 относительно каждой изъ трехъ осей координатъ.

Перенесемъ силы X_1 , Y_1 и Z_1 по ихъ направленіямъ въ точки B , C и D и замѣтимъ, что моменты каждой изъ этихъ силъ относительно параллельныхъ имъ осей OX , OY и OZ равны нулю.

Поэтому моментъ силы F_1 относительно оси OX или

$$M_x F_1 = M_x Y_1 + M_x Z_1 \text{ и точно также}$$

$$M_y F_1 = M_y X_1 + M_y Z_1$$

$$M_z F_1 = M_z X_1 + M_z Y_1$$

Но, какъ легко видѣть, $M_x Y_1 = Y_1 y_1$; $M_x Z_1 = Z_1 z_1$,
 $M_y X_1 = X_1 x_1$, $M_y Z_1 = Z_1 z_1$, $M_z X_1 = X_1 x_1$, $M_z Y_1 = Y_1 y_1$.

Написавъ совершенно подобныя же выраженія для моментовъ остальныхъ силъ F_2 , F_3 , F_4 и сложивъ однородные моменты, получимъ, что

$$\Sigma (Z y - Y z) = \Sigma M_x F, \quad \Sigma (X z - Z x) = \Sigma M_y F, \quad \Sigma (Y x - X y) = \Sigma M_z F$$

Такимъ образомъ уравненія равновѣсія можно представить въ такомъ видѣ:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma M_x F = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (2)$$

и

$$\Sigma M_y F = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_z F = 0 \quad (6).$$

Итакъ для равновѣсія свободнаго твердаго тѣла необходимо, чтобы:

1. *алгебраическая сумма проекцій всехъ силъ на каждую изъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей равнялась нулю и*

2. *алгебраическая сумма моментовъ всехъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимно перпендикулярныхъ осей равнялась нулю.*

§ 168. Легко замѣтить, что найденныя шесть уравненій не только необходимы, но и достаточны для равновѣсія. Дѣйствительно, основныя условія равновѣсія $R = 0$ и $G = 0$, т.-е. равнодѣйствующая сила и ось равнодѣйствующей пары должны быть равны нулю, удовлетворяются только въ томъ случаѣ, когда проекціи R и G на *любую ось* будутъ равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, проекціи R и G на одну или даже на двѣ взаимно перпендикулярныя оси могутъ равняться нулю, когда сами

величины R и G не равны нулю, но перпендикулярны къ тѣмъ осямъ. Итакъ, двухъ или четырехъ уравненій проекцій и моментовъ силъ недостаточно для выраженія условій равновѣсія. Но такъ какъ прямая не можетъ быть одновременно перпендикулярна къ тремъ взаимно-перпендикулярнымъ осямъ, то шесть уравненій вполне достаточно для опредѣленія равновѣсія. Изъ первыхъ трехъ уравненій необходимо слѣдуетъ, что $R = 0$, а изъ трехъ послѣднихъ, что $G = 0$.

§ 169. Частные случаи равновѣсія.

1. **Всѣ силы лежатъ въ одной плоскости.** Расположимъ три оси координатъ такимъ образомъ, чтобы плоскость XOY совпала съ плоскостью дѣйствія силъ. При этомъ уравнение $\sum F_z = 0$ *всегда* удовлетворяется само собою, такъ какъ проекція силъ на ось OZ всегда будутъ $= 0$.

Точно также *всегда* удовлетворяются сами собою уравненія (4) и (5) $\sum M_x F = 0$ и $\sum M_y F = 0$, такъ какъ данныя силы лежатъ въ плоскости осей OX и OY и слѣдовательно моменты силъ относительно этихъ осей всегда $= 0$. Итакъ, въ этомъ случаѣ для равновѣсія необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись только три уравненія

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z F = 0.$$

Эти уравненія можно получить и непосредственно. Для этого проведемъ въ плоскости силъ оси OX и OY , перенесемъ всѣ данныя силы въ начало O координатъ и сложимъ всѣ получившися при этомъ силы и пары въ одну равнодѣйствующую силу R и одну равнодѣйствующую пару G , лежащая въ одной плоскости XOY .

Какъ извѣстно, равнодѣйствующая сила $R = V(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2$, гдѣ $\sum F_x$ и $\sum F_y$ суть суммы проекцй всѣхъ данныхъ силъ на оси OX и OY . Моментъ равнодѣйствующей пары G — алгебр. суммѣ моментовъ всѣхъ слагающихъ паръ $=$ алгебр. суммѣ моментовъ всѣхъ силъ относительно оси OZ или, что все равно, относительно точки O (такъ какъ всѣ силы и пары лежатъ въ одной плоскости XOY), т.-е. $G = \sum M_z F$.

Такимъ образомъ изъ основныхъ условій равновѣсія $R = 0$ и $G = 0$ получимъ три уравненія

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_z F = 0$$

Теорема моментовъ относительно трехъ точекъ. Для опредѣленія равновѣсія свободнаго тѣла, къ которому приложены силы, лежащая въ одной плоскости пользуются еще слѣдующей теоріею:

Для равновѣсія силъ, лежащихъ въ одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно каждой изъ трехъ точекъ, принадлежащихъ этой плоскости и не лежащихъ на одной прямой, равнялась нулю.

Положимъ, что въ плоскости силъ F_1, F_2, \dots, F_n взяты такіе три точки A, B, C и что

$$\sum M_A F = 0 \dots (1); \quad \sum M_B F = 0 \dots (2) \quad \text{и} \quad \sum M_C F = 0 \dots (3).$$

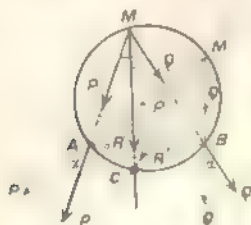
Изъ равенства $\sum M_A F = 0$ заключаемъ, что моментъ равнодѣйствующей R нѣхъ силъ относительно точки A равенъ нулю, что возможно въ *одномъ* случаѣ или равнодѣйствующая $R = 0$, или она проходитъ черезъ точку A (т. е. плечо равнодѣйствующей равно нулю).

Прибавляя равенство $\sum M_B F = 0$, заключаемъ точно такимъ же образомъ, что или равнодѣйствующая R равна нулю, или она проходитъ черезъ точки A и B . Наконецъ прибавивъ сюда и третье условіе, выражаемое равенствомъ $\sum M_C F = 0$, находимъ, что равнодѣйствующая или равна нулю, или проходить черезъ три точки A, B и C . Последнее однако невозможно, такъ какъ эти точки не лежатъ на одной прямой. Итакъ, равнодѣйствующая R равна нулю, т. е. всѣ приложенныя силы взаимно уравновѣшиваются.

Примѣчаніе 1. Чтобы сложить графически нѣсколько силъ, лежащихъ въ одной плоскости, складываютъ по правилу параллелограмма попарно, въ какомъ угодно порядкѣ, силы нѣхъ равнодѣйствующими. По конечному результату получится или одна равнодѣйствующая сила, или одна пара силъ, или *равновѣсіе* двѣ равныя и прямо противоположныя силы, каими уничтожаются. Но если силы нѣхъ однако рѣшительно не приходятъ въ практикѣ, такъ какъ, въ случаѣ бѣзпошибнаго числа силъ они приложены въ одну точку востроуправымъ въ одну сторону, находясь въ равновѣсіи, то тогда востроуправымъ построения, называемыя *способомъ перенесенія моментовъ*, въ изученіи котораго мы перейдемъ впоследствии.

Примѣчаніе 2. Если силы, лежащія въ одной плоскости имѣютъ одну равнодѣйствующую, то между точками, лежащими на ея линіи дѣйствія, существуетъ одна точка, называемая **центромъ системы силъ**. Она обладаетъ тѣмъ замѣчательнымъ свойствомъ, что при поворотѣ всѣхъ данныхъ силъ около нѣхъ точекъ приложения ихъ одинъ и тотъ же произвольный уголъ, равнодѣйствующую

лиш, вращается на тот же самый угол всегда проходит через эту точку. Докажем существование такого центра для двух сходящихся сил P и Q , приложенных в точках A и B (фиг. 95). Перенесем эти силы в общую



Фиг. 95

точку M схода, назовем их равнодействующую R и на прямой AB , как на хорде, построим дугу, выходящую из M и B под углом $\angle MBT = \angle C$ пересечения равнодействующей с дугой AMB и есть искомый центр сил P и Q .

Действительно повернем сил. P и Q около точек A и B на один и тот же произвольный угол α и построим их равнодействующую R' . Так как угол $\angle AM'B$ углу $\angle AMB$, то вершина M будет лежать на дуге AMB и углы $\angle MBN$ и $\angle M'BN$ принадлежащие равным треугольникам, равны

между собою и, следовательно, соответствовать одной и той же дуге AC , так что прямая $M'R'$, так же как и прямая MB , проходит через точку C .

Итак, при вращении сил P и Q на одинаковые углы, точка схода их перемещается по дуге AMB , а равнодействующая всегда проходит через одну и ту же точку C .

Треугольник ABC , образуемый прямыми, соединяющими центры 2-х сил и их точки приложения, очевидно, подобен треугольнику PMN . Следовательно $AC = BC = Q/R$. Отсюда заключаем, что при $P = Q$ треугольник ABC будет равнобедренный.

Если дано несколько сил то, находя последовательно центр кажущихся двух сил и их равнодействующую, получим искомый центр всех данных сил.

II. Все силы сходятся в одной точке В этом случае, проведем через эту точку O три взаимно перпендикулярных оси OX , OY и OZ , заметим, что все три уравнения (4), (5) и (6) моменты сил удовлетворяются сами собою, так как в точке O все силы пересекаются с осями. Итак, для равновесия такой системы сил необходимо и достаточно существование трех уравнений

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma F_z = 0.$$

Такое заключение вытекает и непосредственно из того соображения, что в случае сил, сходящихся в одной точке, не может образоваться пара сил, так как сходящиеся силы всегда складываются в одну равнодействующую R , которая в случае равновесия должна равняться нулю.

Итак $R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2} = 0$,
откуда следует, что $\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0$ и $\Sigma F_z = 0$

III. Все силы параллельны между собою. Предположим сперва, что данные силы не лежат в одной плоскости. Проведем три

координатными оси такъ, чтобы одна изъ нихъ, напр. ось OZ , была параллельна общему направлению силъ. При этомъ имъ будутъ три уравненія равновѣсія, а именно (1), (2) и (6) удовлетворяютъ сами собою. Проекции силъ, параллельныхъ оси OZ , на оси OX и OY всегда равны нулю, точно также какъ будутъ равны нулю и моменты этихъ силъ относительно оси OZ .

Итакъ, для равновѣсія тѣла въ этомъ случаѣ необходимо и достаточно существованіе трехъ уравненій:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_x F = 0, \quad \sum M_y F = 0.$$

Если все данныя параллельныя силы лежатъ въ одной плоскости то координатныя оси слѣдуетъ провести такъ, чтобы двѣ изъ нихъ, напр. OX и OZ , лежали въ этой плоскости, тогда уравненіе $\sum M_x F = 0$ удовлетворяетъ само собою и слѣдовательно для равновѣсія тѣла необходимы и достаточны только два уравненія

$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_y F = 0.$$

Равновѣсіе несвободнаго твердаго тѣла.

§ 170. Свободныя твердыя тѣла, могущія двигаться безпрепятственно по всемъ направленіямъ, на практикѣ встрѣчаются въ довольно рѣдкихъ случаяхъ *). Возможность свободно перемѣщаться по какому угодно направленію у большей части земныхъ предметовъ бываетъ обыкновенно ограничена существованіемъ различнаго рода препятствій (связей, опоръ), вследствие чего всѣ такія тѣла называются *несвободными*.

Разнообразныя препятствія, ограничивающія свободу перемѣщенія тѣлъ, сводятся къ слѣдующимъ тремъ главнымъ видамъ сопротивленій. Тѣло несвободно, когда оно имѣетъ 1) одну неподвижную точку; 2) двѣ неподвижныя точки или неподвижную ось; 3) когда оно опирается одной или нѣсколькими точками на неподвижную плоскость или вообще на какую-нибудь поверхность.

Само собою понятно, что несвободное твердое тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи не только въ томъ случаѣ, когда всѣ приложенныя къ нему силы *сами по себѣ* уравновѣшиваются (какъ то

*) Сюда относятся напр. тѣла, свободно движущіяся въ газахъ, жидкостяхъ или въ безвоздушномъ пространствѣ.

необходимо для свободного тѣла), но и тогда, *когда эти силы уравниваются сопротивленіемъ его неподвижныхъ связей или опоръ* *). Такъ какъ однако силы могутъ уравниваться только силами, то, слѣдовательно, сопротивленія связей или опоръ несвободнаго тѣла мы должны разсматривать тоже какъ силы. По закону равенства дѣйствія и противодѣйствія *силы сопротивленій* (или силы реакціи) связей и опоръ равны и прямо-противоположны производимымъ на эти связи и опоры давленіямъ отъ совокупнаго дѣйствія приложенныхъ къ тѣлу силъ.

Такимъ образомъ силы сопротивленій неслѣдуетъ зависать отъ величины и направленія приложенныхъ силъ и могутъ быть определены слѣдующимъ образомъ. Придавъ во вниманіе силы сопротивленія, мы можемъ несвободное тѣло разсматривать какъ свободное и примѣнить къ нему шесть известныхъ уравненій равновѣсія. Одна часть этихъ уравненій, въ составъ которыхъ будутъ входить только одніе данныя приложенныя силы, будетъ выражать собственно условия равновѣсія несвободнаго тѣла, другая часть уравненій, въ составъ которыхъ будутъ входить данныя приложенныя силы и силы сопротивленій, разсматриваемыя какъ неизвѣстныя, будетъ служить для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ.

Можетъ однако случиться, что число уравненій второй группы будетъ *недостаточно* для опредѣленія силъ сопротивленія, такъ какъ число связей или опоръ можетъ быть неограниченно, а всѣхъ уравненій равновѣсія только шесть.

§ 171. **Равновѣсіе тѣла, имѣющаго одну неподвижную точку.** Такъ какъ тѣло, имѣющее неподвижную точку, можетъ только вращаться около произвольной оси, проходящей черезъ эту точку, то очевидно, что для равновѣсія такого тѣла необходимо и достаточно, чтобы всѣ приложенныя силы приводились къ одной равнодѣйствующей, проходящей черезъ неподвижную точку или иначе, чтобы алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ приложенныхъ силъ относительно каждой изъ трехъ взаимно перпендику-

*) Часто употребляютъ не совсѣмъ правильное выраженіе: *силы считаются сопротивленіемъ связей или опоръ* (или не могутъ уничтожиться). Встрѣчая непреодолимые препятствія къ движенію, онѣ проявляютъ однако свое дѣйствіе въ видѣ давленія на эти связи или опоры.

лярных осей, пересекающихся въ неподвижной точкѣ, была равна нулю, т.-е. чтобы

$$\sum M_x R = 0; \quad \sum M_y R = 0; \quad \sum M_z R = 0$$

Такъ какъ равнодѣйствующая R уравновѣшивается силой сопротивления R' неподвижной точки, то следовательно сила R' равна по величинѣ и противоположна по направлению равнодѣйствующей R , т.-е. $R' = R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$.

Этотъ же результатъ можно получить и другимъ путемъ. Обозначимъ черезъ α , β и γ углы, составленные силой сопротивления R' съ осями координатъ, и напишемъ три остальныхъ уравнения равновѣсія данному тѣлу, рассматриваемому какъ свободное

$$\sum F_x + R' \cos \alpha = 0, \quad \sum F_y + R' \cos \beta = 0; \quad \sum F_z + R' \cos \gamma = 0,$$

откуда $R' \cos \alpha = -\sum F_x$, $R' \cos \beta = -\sum F_y$, $R' \cos \gamma = -\sum F_z$.

Возвысивъ ось части каждаго изъ этихъ уравненій въ квадраты и сложивъ ихъ, получимъ

$$R'^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = (\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2$$

или, зная, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

$$R' = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}.$$

Если тѣло подвержено дѣйствию только собственнаго вѣса, сосредоточеннаго, какъ извѣстно, въ центрѣ тяжести и направленнаго по вертикали, то для равновѣсія такого тѣла необходимо и достаточно, чтобы центръ тяжести его находился на одной вертикали съ неподвижною точкою. Дѣйствительно, при этомъ моментъ вѣса относительно этой точки, а следовательно и относительно каждой изъ трехъ проходящихъ черезъ не взаимно перпендикулярныхъ осей будетъ равенъ нулю.

§ 172. **Равновѣсiе тѣла, имѣющаго неподвижную ось.** Тѣло, имѣющее неподвижную ось, можетъ или только вращаться около нея, или вращаться и скользить вдоль нея.

Очевидно, что въ первомъ случаѣ для равновѣсiя тѣла необходимо и достаточно, чтобы сумма моментовъ приложенныхъ къ нему силъ относительно этой оси была равна нулю, т.-е. чтобы

$$\sum M_x l = 0.$$

гдѣ x — неподвижная ось.

Чтобы тѣло не могло двигаться вдоль оси, необходимо, чтобы алгебраическая сумма проекцій на эту ось всѣхъ приложенныхъ силъ равнялась нулю, т.-е. чтобы

$$\sum F_x = 0$$

Если на тѣло дѣйствуетъ только его собственный вѣсъ, то очевидно, что для равновѣсія тѣла необходимо и достаточно, чтобы центр тяжести его находился въ одной вертикальной плоскости съ неподвижной осью.

§ 173. Равновѣсіе тѣла, опирающагося на неподвижную плоскость или поверхность.

I. Если тѣло опирается на неподвижную плоскость или поверхность **одной** точкой, то для равновѣсія его необходимо: 1) чтобы всѣ приложенныя къ нему силы приводились къ одной равнодѣйствующей, проходящей черезъ точку опоры и 2) чтобы направление этой равнодѣйствующей было перпендикулярно (нормально) къ опорной плоскости или поверхности.

Первое условіе очевидно само по себѣ. Чтобы выяснитъ необходимость второго условія, предположимъ, что направление равнодѣйствующей будетъ наклонно къ опорной плоскости. Разложивъ эту равнодѣйствующую на двѣ слагающія силы, одну перпендикулярную плоскости и другую параллельную плоскости, найдемъ, что первая сила уравнивается сопротивленіемъ плоскости, а вторая приведетъ тѣло въ движеніе по плоскости.

Замѣтивъ, что направление сопротивленія опорной плоскости или поверхности всегда перпендикулярно или нормально къ плоскости или поверхности, легко доказать двѣ слѣдующія теоремы:

II. Если тѣло опирается на плоскость **двумя** точками, то для равновѣсія его необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ силъ была перпендикулярна къ плоскости и проходила черезъ прямую, соединяющую обѣ точки опоры.

III. Если тѣло опирается на плоскость **тремя или болѣе** точками, то для равновѣсія его необходимо и достаточно, чтобы равнодѣйствующая всѣхъ приложенныхъ силъ была перпендикулярна къ этой плоскости и проходила *внутри* периметра многоугольника, образуемаго прямыми, соединяющими точками опоры

§ 174 **Различные виды равновѣсія несвободныхъ тяжелыхъ тѣлъ.**
Въ несвободныхъ тѣлахъ, подверженныхъ дѣйствию только собственнаго вѣса, различаютъ три вида равновѣсія:

1. *Устойчивое*, когда тѣло, выведенное изъ первоначальнаго положенія равновѣсія, возвращается само вновь въ это положеніе;
2. *неустойчивое*, когда такое тѣло не возвращается въ первоначальное положеніе и падаетъ;
3. *безразличное*, когда тѣло сохраняетъ равновѣсіе въ любомъ своемъ положеніи.

Покажемъ, что равновѣсіе тѣла будетъ *устойчивымъ*, если при отклоненіи его отъ положенія равновѣсія центръ тяжести его *повышается*, *неустойчивымъ*, если при этомъ центръ тяжести *понижается*; *безразличнымъ*, если центръ тяжести остается постоянно на одинаковой высотѣ.



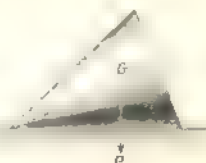
Фиг. 96.



Фиг. 97.



Фиг. 98.



Фиг. 99.

Дѣйствительно, какъ видно изъ фиг. 96, если центръ тяжести тѣла повысится, то вѣсъ P тѣла образуетъ относительно неподвижной точки A моментъ $P \cdot AB$, приближающій тѣло къ его первоначальному положенію.

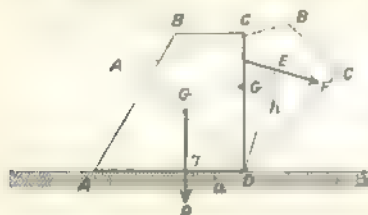
Наоборотъ, если центръ тяжести понижается, то (фиг. 97) образующійся при этомъ моментъ вѣса $P \cdot AC$ удаляетъ тѣло отъ его первоначальнаго положенія.

Наконецъ, если центръ тяжести тѣла не измѣняетъ своей высоты что происходитъ, когда онъ совпадаетъ съ неподвижной точкой или неподвижной осью тѣла, или когда это обуславливается формою тѣла, какъ напр., въ случаѣ шара, а также цилиндра и конуса, лежащихъ своими образующими на горизонтальной плоскости), то (фиг. 98 и 99) сила тяжести P никакого момента не образуетъ и, слѣдовательно, тѣло остается въ равновѣсіи въ любомъ своемъ положеніи.

Тяжелое тѣло стоящее на горизонтальной плоскости (фиг. 100), при вращеніи его около одного изъ реберъ основанія, будетъ находиться въ положеніи *устойчиваго равновѣсія* до тѣхъ поръ, пока центръ тяжести его не будетъ въ одной вертикальной плоскости съ ребромъ вращенія. Въ этотъ моментъ тѣло будетъ находиться въ положеніи *неустойчиваго равновѣсія*, такъ какъ при отклоненіи тѣла изъ этого положенія въ ту или другую сторону центръ тяжести его будетъ понижаться. Отсюда слѣдуетъ, что такое тѣло будетъ тѣмъ *устойчивѣе*, т.-е. тѣмъ болѣе сохранять положеніе устойчиваго равновѣсія, чѣмъ ниже лягутъ его центръ тяжести, такъ какъ въ этомъ случаѣ, тѣмъ большую дугу будетъ описывать центръ тяжести, чтобы достигнуть положенія неустойчиваго равновѣсія.

Поэтому, чтобы увеличить устойчивость такихъ предметовъ, какъ лампы, подвѣшники и проч. искусственно понижаютъ низъ центръ тяжести, загрождая ихъ пустотѣлами основанія свинцомъ или оловомъ.

175 Понятіе объ устойчивости тѣла. Коэффициентъ устойчивости
Положимъ, что на нѣкоторое тяжелое тѣло $ABCD$ (фиг. 100)



Фиг. 100.

дѣйствуетъ сила F и что вслѣдствіе пріятствія тѣло не можетъ имѣть поступательнаго движенія. Тогда дѣйствіе силы F выразится въ томъ, что она будетъ стремиться опрокинуть тѣло, вращая его около ребра, проходящаго черезъ точку D .

Допустимъ для простоты, что фиг. 100 представляетъ сѣченіе тѣла

плоскостью, проходящей черезъ его центръ тяжести G и что сила F лежитъ въ этой плоскости. Тогда опрокидывающій моментъ силы F относительно точки D будетъ $F \cdot DE = Fh$. Ему сопротивляется моментъ вѣса P относительно той же точки, равный $P \cdot DJ = Pa$. Для равновѣсія необходимо, чтобы $Fh = Pa$.

Моментъ Pa , сопротивляющийся опрокидыванію тѣла, представляетъ статическую мѣру устойчивости тѣла. Его называютъ поэтому *моментомъ устойчивости тѣла*. Итакъ, моментъ устойчивости равенъ произведенію вѣса тѣла на плечо его относительно точки или ребра вращенія.

Какъ видно изъ чертежа, наше тѣло имѣетъ большую устойчивость относительно ребра, проходящаго черезъ точку A , чѣмъ относительно ребра, проходящаго черезъ точку D , такъ какъ плечо $AJ >$ плеча DJ .

Подобно также замѣнить, что моментъ устойчивости быстро уменьшается (вслѣдствіе уменьшенія плеча) по мѣрѣ увеличенія угла вращенія центра тяжести тѣла и обращается въ нуль, когда центръ тяжести будетъ находиться въ одной вертикальной плоскости съ ребромъ вращенія.

Отношеніе момента устойчивости къ опрокидывающему моменту, т. е. частное $\frac{Pa}{Fh}$ называется *коэффициентомъ устойчивости*. По коэффициенту устойчивости можно судить о *степени устойчивости* тѣла подъ влияніемъ данныхъ силъ. Поэтому опредѣленіе его величины является весьма важной задачей, въ особенности при сооруженіи такихъ построекъ, какъ высокие стѣны, дымовыя трубы и проч.

Задачи.

Кинематика.

1. Равномерное движение.

1. Какое пространство пройдет въ 3 часа локомотивъ, двигающийся со скоростью въ 15 метровъ.

2. На какомъ разстояніи отъ наблюдателя находится орудіе, если выстрѣлъ слышенъ черезъ 6 секундъ послѣ появленія огня? Скорость звука въ воздухѣ 333 метра.

3. Тѣло *A* проходитъ 18 метр. въ 4'', а тѣло *B* проходитъ 21 метр. въ 5''. Найти скорости обоихъ тѣлъ и ихъ отношеніе.

4. Плыущее по рѣкѣ тѣло проходитъ 18 саж. въ 1 мин. 24 сек. Определить скорость теченія.

5. Пешехода, вышедшаго изъ дома въ 8 час. и идущаго со скоростью 1.5 метра, обгоняетъ въ 8 час. 24 мин. карета, выѣзжавшая изъ того же дома въ 8 час. 16 мин. Найти скорость кареты.

6. Мальчикъ пробѣгаетъ длину дорожки два раза: сперва въ одномъ направленіи со скоростью $v_1 = 6$ фут., а затѣмъ немедленно въ обратномъ направленіи со скоростью $v_2 = 9$ фут. Найти длину дорожки, если всего онъ бѣжалъ $t = 15$ секундъ.

7. Платформа строгальной машины движется впередъ, т.е. приближаясь къ рѣзцу, со скоростью 0.12 метр., а назадъ со скоростью вдвое большей. Сколько надо времени, чтобы обстрогать одинъ разъ плоскость, длина которой 2,7 м., а ширина 0,4 м., если ширина стружки 1 миллиметръ, и рѣзецъ работаетъ только при движеніи платформы впередъ.

8. Со станціи *A* вышелъ пассажирскій поѣздъ, идущій со скоростью $v_1 = 45$ верстъ въ часъ. Спустя $t = 2.5$ час. вышелъ изъ *A* по тому же направленію курьерскій поѣздъ, идущій со скоростью $v_2 = 70$ верстъ въ часъ. Черезъ сколько времени и на какой верстѣ курьерскій поѣздъ догонитъ пассажирскій.

9. Со станции А вышел пассажирский поезд идущий со скоростью $v = 3$ м. въ 1" и через $t_1 = 5$ мин. курьерский поезд, который догоняет пассажирский через $t_2 = 20$ мин. Найти скорость курьерского поезда и расстояние, которое будет между поездами через 20 минут после встречи.

2. Равноѣрно-перемѣнные движенія.

10. Какое расстояние пройдет тѣло въ 0,1 секунды, если скорость его увеличивается въ каждую секунду на 8 футовъ *).

11. Ускорение равноѣрно-ускоренно движущагося тѣла $= 10$ м. Найти скорость его въ началѣ 5-ой секунды.

12. Найти конечную скорость тѣла, двигающагося равноускоренно въ течение 5 сек. съ ускореніемъ 12 м.

13. Найти ускореніе тѣла, которое, двигаясь равноускоренно, прошло въ $\frac{1}{2}$ секунды 8 футовъ.

14. Тѣло, двигаясь равноускоренно, прошло въ 30 сек. 45 метр. Найти его ускореніе.

15. Во сколько секундъ тѣло, двигающееся равноускоренно съ ускореніемъ въ 7 метр., пройдетъ 1,4 километра.

16. Тѣло, двигающееся съ ускореніемъ 20 метр., прошло 1000 метр. Найти его конечную скорость.

17. Тѣло движется съ ускореніемъ $a = 12$ фут. Найти пространство, которое оно пройдетъ въ 5 секундъ и скорость его, когда оно пройдетъ 96 фут. отъ начала движенія.

18. Тѣло, двигающееся равноускоренно, прошло въ 5-ую секунду после начала движенія 90 метр. Найти его ускореніе и скорость въ концѣ 10-ой секунды.

19. Сколько секундъ должно двигаться тѣло съ ускореніемъ въ 25 метр., чтобы приобрести скорость въ 1000 м?

20. Тѣло, двигающееся равноускоренно, прошло въ двѣ слѣдующія одна за другой секунды 45 м. и 55 м. Найти пространство, проходимое имъ въ 20-ую секунду.

21. Скорость поезда въ разсматриваемый моментъ $v_0 = 4$ м., а затѣмъ она увеличивается на 0,2 м. въ секунду. Найти ско-

*. Въ задачахъ 10.—22 предполагается, что тѣло начало двигаться безъ начальной скорости.

рость поезда через 20 сек. и пространство, пройденное имъ за это время.

22. Поездъ, выйдя со станціи и двигаясь равноускоренно, промелъ въ первые 40 сек. 250 метровъ. Определить его ускореніе, а также пространство, пройденное имъ въ слѣдующія 40 сек. Какимъ будетъ скорость поезда въ концѣ 80-й секунды.

23. Съ какой скоростью начало двигаться тѣло, если скорость его уменьшается на 10 метр. въ 1", и оно останавливается черезъ 12".

24. Тѣло, имѣя начальную скорость 90 сантим., и двигаясь равнозамедленно, прошло 3 метра, при чемъ въ концѣ этого пути скорость его равнялась 50 сантим. Найти ускореніе движенія.

25. Поездъ идетъ съ замедленіемъ въ 44 версты въ часъ. Какое пространство онъ долженъ пройти, чтобы скорость его уменьшилась съ 60 до 50 версты въ часъ.

26. Средняя скорость тѣла, двигающагося равнозамедленно, $v = 75$ см., а конечная скорость $v = 50$ см. Найти начальную скорость.

27. Тѣло движется равнозамедленно въ теченіи $t = 90$ сек. Средняя скорость его $v = 125$ м., а конечная скорость $v = 120$ м. Найти ускореніе.

28. Найти начальную скорость тѣла, которое, двигаясь съ замедленіемъ въ 10 фут. въ секунду, останавливается, пройдя разстояніе въ 45 футовъ.

29. Найти пространство, пройденное свободно падающимъ тѣломъ въ 6 секундъ и въ 6-ую секунду *).

30. Найти среднюю скорость тѣла, падающаго 10 секундъ: а) безъ начальной скорости; б) съ начальной скоростью $v_0 = 4$ м.

31. Съ какой высоты упало тѣло и въ теченіи какого времени оно падало, если скорость его въ моментъ удара о землю $v = 35$ м.

32. Свободно падающее тѣло прошло 289 фут. Определить время движенія и конечную скорость.

33. Скорость свободного падающаго тѣла въ некоторый моментъ—160 фут. Какое пространство прошло это тѣло отъ начала

Въ задачахъ на паденіе тѣлъ для упрощенія вычисленій въ русскихъ мѣрахъ принято, что $g = 32$ ф., для вычисленій въ метрическихъ мѣрахъ $g = 9,8$ м.

падения и какое пространство оно пройдет в следующую секунду?

34. Съ какой скоростью сплывет бревно тѣло съ высоты 96 м. вертикально вниз, чтобы оно достигло земли через 3 секунды?

35. Тѣло упало съ высоты $h = 100$ фут. Через сколько секунд оно достигнет земли и какова будетъ его конечная скорость.

36. Свободно падающее тѣло проходить въ первую секунду 1 полной высоты падения. Определить всю высоту и время, употребленное на падение.

37. Тѣло свободно падаетъ съ высоты 1000 м. Определить пространство, пройденное имъ въ послѣднюю секунду падения.

38. Найти пространство, проходимое свободно падающимъ тѣломъ, и его конечную скорость въ 1 и 2 секунды считая отъ конца 2-й секунды падения.

39. Свободно падающее тѣло проходить въ некоторую секунду 336 фут. Сколько уже секундъ падало это тѣло до начала этой секунды?

40. Свободно падающее тѣло имѣло въ некоторой точкѣ своего пути скорость $v_1 = 35$ м., а въ другой, ниже лежащей точкѣ, скорость $v_2 = 371$ м. Какъ велико расстояние между этими точками и во сколько секундъ тѣло прошло это расстояние?

41. Два тѣла начали падать одновременно изъ двухъ различныхъ точекъ, лежащихъ на одной вертикали. Показать, что при падении расстояние между тѣлами не вѣдѣняется.

42. Два тѣла начали падать изъ одной и той же точки, одно послѣ другого. Показать, что расстояние между тѣлами во все время падения будетъ увеличиваться.

43. Два тѣла свободно падаютъ, одно за другимъ черезъ 3 сек. Найти ихъ взаимныя расстояния черезъ 2, 3, 4... секунды.

44. Съ вершины башни свободно падаетъ камень; черезъ секунду бросаютъ влѣдъ за нимъ другой камень, который падаетъ первый черезъ 1 секунду. Съ какой скоростью былъ брошенъ второй камень. $g = 5$

45. Стрѣла пущена вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0 = 112$ фут. На какую высоту она поднимется и черезъ сколько секундъ обратно упадетъ на землю?

46. Выстрѣломъ изъ ружья была пущена вертикально вверхъ пуля съ начальной скоростью 350 м. Какой высоты оно достигнетъ и черезъ сколько секундъ упадетъ обратно на землю?

47. Съ какой скоростью должно быть брошено вертикально вверхъ ядро, чтобы оно могло подняться на высоту 9 километровъ. Черезъ сколько секундъ оно упадетъ обратно на землю?

48. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0 = 120$ ф. Опредѣлить на какой высотѣ и черезъ сколько секундъ послѣ начала движенія скорость его будетъ $v = 40$ ф.

49. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0 = 64$ ф. Опредѣлить на какой высотѣ подъема скорость его будетъ вдвое меньше начальной.

50. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0 = 96$ ф. Спусти сколько секундъ оно, падая уже внизъ, будетъ имѣть скорость вдвое меньшую начальной.

51. Камень, брошенный вертикально вверхъ, упалъ обратно на землю черезъ 6 секундъ. Какая была его начальная скорость и до какой высоты онъ поднялся?

52. Тѣло брошено вертикально вверхъ съ начальной скоростью $v_0 = 1000$ ф. Опредѣлить его среднюю скорость за первые 15 секундъ его движенія. ($g = 32,2$ ф.)

53. Ядро вылетаетъ изъ дула пушки со скоростью $v = 660$ м. Длина пушки $l = 3$ м. Найти ускореніе, сообщаемое ядру выстрѣломъ.

54. Камень упалъ въ колодезь. Черезъ 4 секунды былъ слышанъ плескъ воды. Опредѣлить глубину колодезя: а) считая, что звукъ распространяется моментально; б) принимая во вниманіе, что скорость звука $= 1100$ фут. въ секунду.

55. Свободно падающій камень въ концѣ первой секунды паденія встрѣчаетъ стеклянную пластинку и разбиваетъ ее, вслѣдствіе чего теряетъ половину своей скорости. Найти пространство, проходимое камнемъ въ слѣдующую секунду.

56. Паровозъ, имѣвшій въ извѣстномъ моментъ скорость 15 м., заторможенъ такимъ образомъ, что теряетъ въ каждую секунду 2 м. скорости. Опредѣлить: 1) скорость паровоза черезъ 5 секундъ послѣ начала тормажения и пройденное въ это время имъ пространство; 2) черезъ сколько секундъ онъ остановится; 3) каково должно быть замедленіе хода паровоза, чтобы онъ остановился черезъ $1\frac{1}{2}$ минуты.

57. Тѣло поднимается по наклонной плоскости съ начальной скоростью въ 40 фут., при чемъ въ каждую секунду скорость его

уменьшается на 8 фут. Найти 1) сколько секунд будет подниматься вверх это тело; 2) какой путь оно при этом пройдет.

58. Два шара одновременно начинают двигаться: первый свободно падает на землю с высоты 19,6 м., а второй поднимается вертикально вверх со скоростью, соответствующей этой высоте. Через сколько секунд оба шара будут на одной высоте над землей.

59. Баба парового молота имеет высоту подъема 1,25 м. Время необходимое для ее поднятия, равно двойному времени ее свободного падения. Сколько ударов баба может сделать в минуту?

60. Два тела падают с одной и той же высоты через $t = 3$ сек. одно после другого. Через сколько секунд после начала падения второго тела их взаимное расстояние будет равно $s = 192$ фута.

61. На одной вертикали взяты на равных расстояниях одна от другой точки A , B , C и D . Показать, что если тело начнет падать из точки A то времена, употребленные на прохождение равных частей AB , BC и CD , относятся между собой как $1: (\sqrt{2}-1): (\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

62. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 15$ ф. Поднявшись на высоту $h_1 = 2$ фута, оно встретило упругую поверхность, которая отбросила его назад с такой же скоростью, с какой ударились в нее тело. Определить, 1) с какой скоростью тело упало на эту поверхность, 2) найти отклонение всего времени подъема и падения тела в данном случае в такому же времени, но предполагая, что встреча с поверхностью не происходит.

63. Изобразить графически пространство, пройденное телом в 5 секунд в равноускоренном движении, зная, что скорость его возросла за это время от 30 до 75 сантиметр.

64. Паровоз, выйдя со станции, двигался равноускоренно в течение 10 минут с ускорением в 20 м в минуту, затем двигался равномерно с приобретенной скоростью в течение 5 минут и наконец в течение следующих 6 минут шел равномерно-замедленно до полной остановки. Изобразить графически и вычислять все пространство пройденное паровозом.

3. Сложныя движенія.

65. Скорость парохода $v_1 = 20$ ф. Определить составную скорость шара, катящегося по палубѣ со скоростью $v_2 = 15$ ф.: а) от кормы къ носу, б) от носа къ кормѣ; в) по крайчайшему разстоянію отъ одного борта до другого.

66. Два парохода отправляются одновременно изъ одного и того же мѣста. Одинъ пароходъ идетъ съ запада на востокъ со скоростью 12 верстъ въ часъ, а другой съ юга на сѣверъ со скоростью 16 верстъ въ часъ. На сколько верстъ будутъ расходиться въ каждый часъ другъ отъ друга оба парохода.

67. Два пешехода находятся другъ отъ друга въ разстояніи $d = 15$ м. Скорость первого v_1 метр., а второго v_2 метр., при чемъ $v_1 > v_2$. Черезъ сколько секундъ путешественники поравняются, если они идутъ: а) другъ другу на встрѣчу; б) по одному направленію.

68. Два гѣла, одновременно выпущены изъ одной точки A , движутся по сторонамъ угла BAC со скоростями $v_1 = 9$ м. и $v_2 = 40$ м. Черезъ сколько секундъ ихъ взаимное разстояніе будетъ $d = 615$ м., если уголъ BAC равенъ а) 90° , б) 60° .

69. Курьерскій поѣздъ въ 75 метр. длиною, двигаясь со скоростью 95 километровъ въ часъ, встрѣчаетъ пассажирскій поѣздъ длиною въ 125 метр., движущійся со скоростью 55 километровъ въ часъ. Определить: а) сколько времени будетъ проходить пассажирскій поѣздъ мимо наблюдателя, сидящаго въ курьерскомъ поѣздѣ; б) во сколько времени весь курьерскій поѣздъ пройдетъ мимо всего пассажирскаго.

70. Тѣло, падающее съ высоты 169 фут., во время паденія равномерно переносится вѣтромъ со скоростью 8 фут. въ горизонтальномъ направленіи. На какомъ разстояніи отъ вертикали, опущенной изъ начальной точки паденія упадетъ это тѣло на землю?

71. Точка обладаетъ двумя скоростями v_1 и v_2 , уголъ между которыми — 60° . Найти величину и направленіе составной скорости, если

$$\begin{array}{lll} v_1 = 40 \text{ м;} & 50 \text{ м;} & 100 \text{ м.} \\ v_2 = 60 \text{ м;} & 70 \text{ м;} & 100 \text{ м.} \end{array}$$

72. Точка обладает двумя равными скоростями $v = 30$ м., угол между которыми α . Найти величину и направление составной скорости, если

$$\alpha = 90^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ.$$

73. Точка обладает тремя скоростями: $v_1 = 20$ м.; $v_2 = 15$ м.; $v_3 = 30$ м., лежащими в одной плоскости и образующими с горизонтальной плоскостью соответственно углы в 30° , 45° и 60° . Найти величину и направление составной скорости.

74. Точка обладает тремя взаимно перпендикулярными скоростями: $v_1 = 96$ м., $v_2 = 28$ м. и $v_3 = 75$ м. Определить величину и направление составной скорости.

75. Точка обладает тремя скоростями $v_1 = 3$ м., $v_2 = 4$ м. и $v_3 = 6$ м. Углы, образуемые тремя взаимно перпендикулярными осями OX , OY и OZ с направлением первой скорости, соответственно равны: $\alpha_1 = 90^\circ$, $\beta_1 = 45^\circ$, $\gamma_1 = 45^\circ$, с направлением второй скорости $\alpha_2 = 30^\circ$, $\beta_2 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 60^\circ$ с направлением третьей скорости $\alpha_3 = 72^\circ$, $\beta_3 = 18^\circ$, $\gamma_3 = 90^\circ$. Определить величину и направление составной скорости. *).

76. Разложить скорость точки $v = 40$ м. на две скорости, из которых одна $= 30$ м. и образует с другой угол α , если

$$\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ.$$

77. Два поезда идут со скоростями $v_1 = 30$ верст и $v_2 = 50$ верст в час по направлениям, угол между которыми α . Найти их относительную скорость, если

$$\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 150^\circ.$$

4 Вращательное круговое движение.

78. Найти скорость точки на окружности маховика, делающего $n = 30$ оборотов в минуту, если диаметр маховика $d = 5$ м. Определять также угловую скорость маховика.

*) Можно было бы ограничиться данными только для углов α (или β) образуемых направлением каждой скорости с двумя взаимно перпендикулярными осями, так как угол ее с третьей осью γ может быть определен из уравнения $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

79. Найти скорость вращения земли у экватора, если радиус $R = 6000$ верст.

80. Решить предыдущую задачу в метрических мерах.

81. Во сколько раз конец минутной стрелки движется быстрее конца часовой, если длина первой вдвое больше длины второй. — 24

82. Скорость на окружности жернова, делающего 100 оборотов в минуту, равна 7,6 м. Определить диаметр жернова и угловую скорость. — 1'

83. Лошадь вращает вертикальный вал при помощи водила. Определить число оборотов вала в минуту, если скорость лошади $= 0,9$ м., а длина водила $= 4,8$ м.

84. Если невыгодная скорость резания — 75 миллиметр., то сколько оборотов должен делать шпиндель токарного станка при обточке шкива диаметром в 1 метр, чтобы снять первую стружку?

85. Во сколько времени можно обточить вал, диаметр которого $= 0,08$ м., а длина $= 4,5$ м., если скорость резания — 100 миллиметр., а ширина стружки 0,5 миллиметр.?

86. На горизонтальном валу, вращающемся при помощи рукоятки, намотана веревка с грузом. Радиус окружности, описываемой рукояткой $= 40$ см., а число оборотов в минуту $= 36$.

Определить скорость на окружности рукоятки, а также скорость подъема груза, если диаметр вала $= 12$ см.

87. С кривошипом, длина которого равна r , равномерно вращающимся вместе с валом машины, соединен шарнирно шатун, другой конец которого движется в горизонтальных направляющих. Определить: 1) будет ли равномерно двигаться шатун; 2) какой путь и с какой средней скоростью пройдет конец шатуна при одном обороте вала, если скорость конца кривошипа $v = 4,71$ м.

88. Вал паровой машины делает $n = 50$ оборотов в минуту. Длина хода поршня $l = 0,75$ м. Найти среднюю скорость поршня.

89. Ход поршня паровой машины $l = 0,5$ м.; средняя скорость его $V = 0,9$ м. Найти число оборотов вала в минуту.

90. Диаметры двух шкивов d_1 и d_2 . Если первый шкив делает в минуту n_1 оборотов, то сколько оборотов в это же время делает другой шкив. Скорости на окружностях обоих шкивов одинаковы $d_1 = 84$ см.; $d_2 = 36$ см.; $n_1 = 18$.

91. Числа оборотов двух сцепленных зубчатых колес соответственно равны 100 и 150. Диаметр первого колеса 75 см. Найти диаметр второго.

92. Тѣло, находившееся надъ поверхностью земли на высотѣ 4 фут., брошено горизонтально и упало на землю на разстояніи 400 фут. Съ какою скоростью оно было брошено?

93. Тѣло, находившееся надъ землею на разстояніи 25 фут., брошено горизонтально со скоростью 44 фута. Найти на какомъ разстояніи тѣло упадетъ на землю и съ какою скоростью.

5 Основные законы механики. Зависимость между массой, силой и ускореніемъ.

94. Аэростатъ поднимается вертикально вверхъ съ нѣкоторой скоростью. Съ корзины его спущены канаты, на которыхъ виситъ якорь. Если перерѣзать канаты, то какъ будетъ двигаться якорь, а также аэростатъ?

95. Поездъ идетъ со скоростью 36 километр. въ часъ. Съ самого конца поезда свободно падаетъ грузъ съ высоты 4,9 метра. Гдѣ упадетъ этотъ грузъ?

96. Человѣкъ, держа въ рукахъ гирю въ 10 фунтовъ, падаетъ внизъ съ нѣкоторой высоты. Определить давленіе гири на его руку во время паденія.

97. Нѣкоторое тѣло начинать двигаться подъ вліяніемъ постоянной силы и въ первую секунду проходить 8 футовъ. Найти отношеніе этой постоянной силы къ вѣсу тѣла.

98. Подъ дѣйствіемъ постоянной силы нѣкоторое тѣло проходитъ въ 3 последовательныя секунды соответственные пространства въ 12, 18 и 24 фута. Определить отношеніе постоянной силы къ вѣсу тѣла.

99. Поездъ идетъ равноускоренно. Въ часъ пополудни скорость его была 12 килом. въ часъ, а черезъ 10 минутъ она возрасла до 36 килом. въ часъ. Определить скорость поезда въ 7½ минутъ второго часа, а также отношеніе силы тяги къ вѣсу поезда.

100. На тѣло, двигавшееся равномерно со скоростью 40 фут. въ 1", начала дѣйствовать постоянная сила по направленію противоположному движенію тѣла. Отъ дѣйствія этой силы тѣло, пройдя 20 ф., остановилось. Найти отношеніе силы къ вѣсу тѣла.

101. Тѣло, вѣсомъ въ 50 килогр., приводится въ движеніе дѣйствіемъ постоянной силы. Черезъ 5 секундъ послѣ начала движенія дѣйствіе силы прекращается и тѣло проходитъ въ двѣ слѣдующія затѣмъ секунды 19,6 м. Определить величину постоянной силы.

102. Какое ускореніе сообщитъ шару въ 100 пудовъ постоянная сила въ 1 фунтъ? Какое пространство пройдетъ этотъ шаръ въ 1 минуту?

103. Определить массу куска желтой мѣди, объемъ котораго 35 куб. см. Удельный вѣсъ желтой мѣди 8,4.

104. Чугунный шаръ, диаметромъ въ 9 см., приводится въ движеніе постоянной силой въ 1 килогр. Определить ускореніе движенія и пространство, пройденное шаромъ въ 10 секундъ. Удельный вѣсъ чугуна 7,2.

105. Тѣло, вѣсомъ въ 100 килогр., движется подъ дѣйствіемъ постоянной силы въ 36 килогр. Въ теченіи некотораго промежутка времени скорость тѣла увеличилась съ 3-хъ метр. до 21 метра. Найти величину этого промежутка времени.

106. Какую силу надо приложить къ тѣлу вѣсомъ въ 400 пуд., чтобы черезъ 8 сек. оно приобрѣло скорость въ 14 фут. въ 1"

107. Тѣло, вѣсомъ въ 60 пуд., прошло подъ дѣйствіемъ постоянной силы въ 10 секундъ 360 фут. Определить величину силы.

108. Тѣло, вѣсомъ въ 50 килгр., двигалось равномерно со скоростью 2 метра въ 1". Къ нему приложили силу въ 1 килгр. Найти, какой путь пройдетъ это тѣло въ слѣдующія 10 секундъ, если направленіе силы а) совпадало съ направленіемъ движенія; б) было противоположно ему.

109. Тѣло, вѣсомъ въ 2,5 пуда, приобретаетъ отъ постоянной силы равной 20 фунтамъ черезъ некоторый промежутокъ времени скорость — 3 фута. Найти силу, которая сообщитъ въ то же время скорость, равную 6 фут., тѣлу вѣсомъ въ 5 пудовъ.

110. Сила въ 1 килгр., дѣйствуя на тѣло, движущееся съ постоянной скоростью въ 50 м., задерживаетъ его движеніе и черезъ 5 секундъ останавливаетъ его. Направленіе силы прямо противоположно направленію движенія. Найти массу этого тѣла.

111. Найти отношеніе двухъ силъ F_1 и F_2 , изъ которыхъ первая, дѣйствуя на тѣло вѣсомъ въ 5 фунтовъ, сообщаетъ ему ускореніе въ 12 футовъ, а вторая, дѣйствуя на тѣло вѣсомъ въ 28 фунтовъ, сообщаетъ ему ускореніе въ $7\frac{1}{2}$ футовъ.

С т а т и а.

6 Сложение и разложение силъ

I. Сходящіяся силы

112—113. На одну и ту же точку тѣла дѣйствуютъ силы (въ киллограммахъ)

по одному направленію, по прямъ-противоположному направленію

112. 20; 30; 70; 10; 45; 15; 30; 20

113. 10; 20; 30; 13; 40; 50; 60; 70; 50

Найти силу R , если известно, что подѣ дѣйствіемъ всѣхъ приложенныхъ силъ тѣло остается въ равновѣсн

114—116. Силы P и Q дѣйствуютъ на одну и ту же точку подѣ прямыми угломъ. Найти ихъ равнодѣйствующую, если

114. $P = 5$; $Q = 12$. 115. $P = 28$; $Q = 15$. 116. $P = 39$; $Q = 80$.

117—118. Силы P и Q дѣйствуютъ на одну и ту же точку подѣ прямыми угломъ. Найти ихъ равнодѣйствующую R и углы (P, R) и (Q, R) , если

117. $P = 5$; $Q = 5$; 3 118. $P = Q = 10$.

119—124. Двѣ равныя силы, по 10 нуд каждая, дѣйствуютъ на точку подѣ угломъ α . Найти ихъ равнодѣйствующую, если α равно

119. 30° . 120. 45° . 121. 60° . 122. 90° . 123. 120° . 124. 150° .

125—128. Въ центрѣ правильнаго n -угольника приложено $n - 1$ равныхъ силъ по P килгр., направленныхъ къ его вершинамъ. Найти равнодѣйствующую, если

125. $n = 3$. 126. $n = 4$. 127. $n = 5$. 128. $n = 6$.

129—131. Разложить силу $R = 100$ килгр. на 2 равныя силы, если каждыя изъ нихъ составляетъ съ силою R уголъ α , равныя

129. 30° . 130. 45° . 131. 60° .

132—136. Двѣ силы въ 36 и 48 килогр. дѣйствуютъ на точку подѣ угломъ α . Найти ихъ равнодѣйствующую, если α равно

132. 0° . 133. 90° . 134. 180° . 135. 60° . 136. 120° .

137. Три равныя силы, лежащія въ одной плоскости, дѣйствуютъ на одну точку. Одна изъ силъ составляетъ съ каждой изъ остальныхъ уголъ 120° . Найти равнодѣйствующую этихъ трехъ силъ.

138. Показать, что равнодѣйствующая силъ въ 7 и 14 клгр., дѣйствующихъ одна къ другой подъ угломъ въ 120° , равна равнодѣйствующей двухъ равныхъ силъ по 7 клгр., дѣйствующихъ подъ угломъ въ 60° .

139. На точку дѣйствуютъ три силы въ 3, 7 и 13 клгр. Можетъ ли точка остаться въ равновѣсїи подъ дѣйствїемъ этихъ силъ, какъ бы онѣ ни были приложены?

140. Разложить данную вертикальную силу въ 10 клгр. на двѣ слагающія, изъ которыхъ одна была бы горизонтальна, а другая наклонена къ вертикали подъ угломъ въ 45° . Определить графически и аналитически эти силы.

141. Разложить силу въ 15 клгр. на двѣ взаимно-перпендикулярныя силы, величины которыхъ относились бы какъ 3 : 4.

142. Разложить силу въ 100 клгр. на двѣ силы, изъ которыхъ одна бы вдвое болѣе данной силы, а другая составляла бы съ данной силой прямой уголъ.

143. Вообразимъ параллелограммъ, прилежащія стороны котораго AB и AC , а діагональ AD . Раздѣлимъ сторону AB пополамъ въ точкѣ E . Показать, что равнодѣйствующая двухъ силъ, представляемыхъ отрезками AB и AC , вдвое болѣе равнодѣйствующей двухъ силъ, представляемыхъ отрезками AE и AC .

144. Сила въ 6 клгр., направленная внизъ подъ угломъ въ 45° къ горизонту, приложена къ тѣлу, лежащему на гладкой горизонтальной плоскости. Определить графически и аналитически горизонтальную силу, достаточную, чтобы удерживать тѣло въ покоѣ.

145. Къ вершинѣ I квадрата $ABCD$ приложены силы, представляемыя прямыми AB , IC и ID . Найти ихъ равнодѣйствующую.

146. Къ сторонамъ квадрата $ABCD$ приложены силы, дѣйствующія первая въ 10 клгр. по направленію отъ D къ A ; вторая въ 10 клгр. по направленію отъ B къ C и третья въ 20 клгр. по направленію отъ I къ B . Найти равнодѣйствующую этихъ 3-хъ силъ.

147. Три равныя веревки связаны въ узелъ; двѣ изъ нихъ привязаны къ гвоздямъ, вбитымъ на одинаковой высотѣ, а къ

третьей подвѣсить грузъ $P = 10$ кгр. Определить графически и аналитически силы, стремящіяся вырвать гвозди, если уголъ между двумя первыми веревками $= 60^\circ$.

148 Грузъ въ 24 кгр. подвѣшенъ на двухъ тросахъ, изъ ко-
торыхъ одна горизонтальная, а другая наклонна къ горизонту
подъ угломъ въ 135° . Определить аналитически и графически на-
тяженіе каждой тяги.

149 Когда бѣлку тянуть по рѣбѣ канатомъ (бичевой) посред-
ствомъ силы людей или лошадей, то обыкновенно канатъ имѣетъ
значительную длину. Почему не употребляютъ въ этомъ случаѣ
короткаго каната? Какой канатъ слѣдуетъ употребить, если бѣрка
движется силой буксирнаго парохода?

150. Найти равнодѣйствующую трехъ взаимно перпендикуляр-
ныхъ силъ, равныхъ 3 п., 4 п. и 12 п.

151 Окружность раздѣлена на нѣсколько равныхъ частей; къ
центру ея приложены равныя силы, направленныя по радиусамъ
идущимъ къ точкамъ дѣленія. Найти ихъ равнодѣйствующую.

152. Въ окружности проведенъ диаметръ AB и двѣ равныя
хорды CD и EF , перпендикулярныя къ диаметру. Определить
равнодѣйствующую силъ AC , AE , AF и AD .

153. Къ вершинѣ A правильнаго 6-ка $ABCDEF$ приложены
5 силъ AB , AC , AD , AE , AF . Найти равнодѣйствующую этихъ силъ.

154. Основаніе BC треугольника ABC раздѣлено въ точкахъ
 D и E на 3 части. Определить равнодѣйствующую силъ AB , AD ,
 AE и AC , зная, что длина основанія $= m$.

155. Къ точкѣ O пересѣченія трехъ медианъ \triangle -ка ABC при-
ложены три силы OA , OB и OC . Найти ихъ равнодѣйствующую.

156. Соединимъ точку O , взятую въ плоскости \triangle -ка ABC съ
вершинами его A , B и C , а также съ серединами M , N , P его
сторонъ. Показать графически, что равнодѣйствующая силъ OA ,
 OB и OC равна равнодѣйствующей силъ OM , ON и OP .

II. Параллельныя силы.

157. Къ бруску, лежащему на двухъ опорахъ, подвѣсить грузъ
въ 18 кгр. на разстояніи 40 см. отъ одной изъ опоръ. Найти
давленіе отъ груза на каждую изъ опоръ, если разстояніе между
опорами $= 120$ см.

158. Къ бруску, лежащему на двухъ опорахъ, подвѣшенъ грузъ $P = 12$ клгр. на разстояніи $d = 0,4$ м. отъ середины его. Определить давленіе на опоры, принявъ во вниманіе вѣсъ самого бруска, зная, что длина его $L = 1$ м., а вѣсъ на одинъ погонный метръ $p = 3$ клгр.

159. Къ бруску, лежащему на двухъ опорахъ A и B подвѣшены два груза, одинъ въ 40 клгр. въ точкѣ C , а другой въ 50 клгр. въ точкѣ D . Дано, что $AC : BC = 3 : 2$ и $AD : BD = 5 : 2$. Определить давленіе на каждую опору.

160. На прямую AB дѣйствуютъ двѣ параллельныя силы P и Q въ одну сторону. Определить длину AB , если извѣстно, что точка приложения равнодѣйствующей находится на разстояніи a отъ силы P . $a = 12$ см.; $P = 7$ клгр.; $Q = 3$ клгр.

161. Три параллельныя силы въ 4, 6 и 10 клгр. дѣйствуютъ на тѣло въ одну сторону въ точкахъ A , B и C , лежащихъ на одной прямой. Найти ихъ равнодѣйствующую и ея точку приложения, если $AB = 20$ см., а $BC = 10$ см.

162. На вершины квадрата $ABCD$ дѣйствуютъ 4 параллельныя силы: двѣ силы по 1 клгр. приложены къ вершинамъ A и C и двѣ силы по 2 клгр. приложены къ вершинамъ B и D . Найти равнодѣйствующую вѣсхъ силъ и ея точку приложения.

163. Къ концамъ бруска подвѣшены грузы въ 10 и 20 клгр. Вѣсъ бруска — 10 клгр. Гдѣ надо помѣстить точку опоры, чтобы произошло равновѣсіе?

164. Къ тремъ точкамъ A , B и C , лежащимъ на одной прямой, приложены силы въ 1, 4 и 7 клгр. Извѣстно, что AB

$BC = 1$ и что сила въ 7 клгр. направлена въ сторону противоположную двумъ другимъ силамъ. Найти величину, направление и точку O приложения равнодѣйствующей.

165. Стержень AB , вѣсомъ въ 10 клгр., находится въ равновѣсіи, когда точка опоры удалена отъ A на 8 децим. Определить, гдѣ должна находиться точка опоры, если къ A будетъ подвѣшенъ грузъ въ 6 клгр.

166. Къ концу цилиндрическаго стержня длиной въ 0,6 м. подвѣшенъ грузъ въ 10 клгр. Стержень свободно качается около точки, разстояніе которой отъ нагруженнаго конца — 5 см. Найти вѣсъ стержня. ?

167. Къ двумъ вершинамъ треугольника привѣшены два равныя груза по P клгр., а къ третьей вершинѣ грузъ въ $2P$ клгр.,

Определить величину и точку приложения равнодействующей сил трех грузовъ.

168. Къ вершинамъ квадрата подвѣшены 4 груза, величины которыхъ относятся какъ $2 : 3 : 4 : 5$. Определить равнодействующую и ея точку приложения.

169. По сторонамъ квадрата $ABCD$ дѣйствуютъ 4 силы: отъ A къ B сила въ 3 фунта, отъ B къ C сила въ 4 ф., отъ D къ C сила въ 6 ф. и отъ A къ D сила въ 5 ф. Найти величину и направление равнодействующей этихъ силъ.

170. По двумъ противоположнымъ сторонамъ параллелограмма и по диагонали его дѣйствуютъ силы, равныя длинамъ этихъ линій. Найти точку приложения и величину равнодействующей.

7. Пары силъ. Моменты силъ.

171. Въ одной плоскости дѣйствуютъ 5 паръ силъ. Пирамиды вращения трехъ паръ $(2, 2)$, $(5, 5)$, $(10, 10)$ калр. съ соотвѣстственными плечами 7, 5, 4, 2 см. совпадаютъ съ направлениемъ движенья часовой стрѣлки, а направление двухъ остальныхъ паръ $(35, 35)$ и $(12, 12)$ съ плечами 2 и 5 противоположно направленію первыхъ трехъ. Найти моментъ равнодействующей пары по величинѣ и направленію, а также величины ея силъ если плечо ея $= 5$ см.

172. Силы двухъ паръ (P, P) и (Q, Q) , направлены по сторонамъ параллелограмма $ABCD$ и равны имъ. Найти моментъ равнодействующей пары, если обѣ пары дѣйствуютъ а) въ одну сторону, б) въ разныя стороны. Уголъ $(P, Q) = \alpha$.

173—175. Найти моментъ пары равнодействующей двухъ паръ лежащихъ во взаимно перпендикулярныхъ плоскостяхъ, если u составляющихъ паръ

	плечи (въ см.)	силы (въ калр.)
173.	2 и 3	4 и 5
174.	4 и 3	5 и 7
175.	7 и 5	4 и 9.

176. Пару $(25, 25)$ калр. съ плечомъ 5 см. разложить на двѣ равныя пары, лежащія въ плоскостяхъ образующихъ съ плоскостью равнодействующей пары углы:

30°;

45°;

60°.

177. На вершины Δ -ка ABC действуют параллельныя силы пропорціональныя длинамъ противоположныхъ сторонъ. Определить разстояние центра этихъ силъ отъ стороны BC — a если известны стороны a , b и c и уголъ C .

8. Центры тяжести.

178. Отъ треугольника отрѣзана четвертая часть (малая часть) прямою, параллельною одною изъ его сторонъ. Найти центръ тяжести оставшейся части.

179. Два равнобедренныхъ треугольника, высоты которыхъ h_1 и h_2 , имѣютъ общее основаніе. Найти разстояние отъ основанія центра тяжести площади, заключенной между сторонами треугольниковъ, если они расположены: а) по одну сторону основанія b , по обѣ стороны.

180. Показать, что прямая, соединяющая центры тяжести двухъ Δ -ковъ, имѣющихъ общее основаніе, параллельна прямой соединяющей ихъ вершины.

181. Отъ квадрата отрѣзанъ треугольникъ прямою, соединяющей середины смежныхъ сторонъ. Найти центръ тяжести оставшейся части.

182. Найти центръ тяжести однороднаго круглаго диска радиуса R , изъ котораго вырѣзанъ другой дискъ, описанный на радиусѣ перваго, какъ на диаметръ.

183. Найти центръ тяжести правильнаго 6 -ка, изъ котораго вырѣзанъ ромбъ прямыми, проведенными изъ центра въ двѣ несмежныя вершины. Сторона 6 -ка — a .

184. Найти центръ тяжести квадрата, изъ котораго вырѣзанъ треугольникъ прямыми, проведенными изъ его центра въ двѣ смежныя вершины. Сторона квадрата — a .

185. Найти центръ тяжести полувинны периметра правильнаго 6 -ка, сторона котораго $= a$.

186. На сторонахъ прямоугольнаго равнобедреннаго Δ -ка, гипотенуза котораго — a , построены квадраты. Найти центръ тяжести полученной фигуры.

187. Найти центръ тяжести прямоугольной трапеции, основанія которой a и b , а высота h , при чемъ $a > b$.

188. Найти центръ тяжести тавроваго сѣченія, полная высота

котораго $h = 1\frac{1}{2}a$, длина верхней полочки a , а ширина каждой полочки $= \frac{a}{4}$.

189. Определить центр тяжести 4-ка $ABCD$ если $AB = 1D$, а $BC = CD$.

190. Однородный стержень согнуть под прямым углом так, что одна часть его (l) вдвое длиннее другой. Определить центр тяжести этого стержня.

191. Къ вершинамъ и серединамъ сторонъ треугольной тяжелой доски прикрѣплены равные грузы. Определить центр тяжести всей системы.

192. Къ вершинѣ A однородной доски, имѣющей форму равносторонняго треугольника ABC , прикрѣпленъ грузъ, равный вѣсу доски притомъ такъ, что центръ тяжести его совпадаетъ съ вершиной A . Показать графически положеніе равновѣсія доски, если ее подвѣсить къ веревкѣ, укрѣпленной въ серединѣ стороны AB .

193. Найти центр тяжести половины круговаго кольца, радиусы котораго r и r_1 .

194. Два мѣдныхъ цилиндра спаяны такъ, что оси ихъ образуютъ одну прямую. Высоты цилиндровъ 9 и 6 дюйм., а диаметры основанія соответственно 3 и 2 дюйма. Определить центр тяжести всей системы.

195. Цилиндрической сосудъ, глубина котораго 6 дюйм., а вѣсъ 4 фунта, вмѣщаетъ 2 фунта воды. Когда сосудъ пустой, то центръ тяжести его отстоитъ отъ верха на 3.39 дюйма. Определить разстояніе центра тяжести сосуда, когда онъ наполненъ водою.

196. Найти центръ тяжести полого полушара, внутренній радиусъ котораго $= R$, а толщина стѣнокъ $= c$.

197. Найти центръ тяжести пирамиды, отъ которой отсѣчена плоскостью параллельной основанію другая пирамида, если высота первой пирамиды $= H$, а второй $= h$.

9. Равновѣсіе силъ.

198. Къ свободному невѣсомому тѣлу въ произвольно взятыхъ точкахъ его A , B и C приложены три силы, по величинѣ и на-

правленію равныя (или пропорціональныя) тремъ медіанамъ треугольника ABC . Доказать, что подъ дѣйствіемъ этихъ силъ тѣло останется въ равновѣсіи.

199. Доказать, что если къ этому тѣлу (см. задачу 198) приложены въ точкахъ A , B и C три силы, равныя (или пропорціональныя) тремъ высотамъ треугольника ABC , то тѣло останется въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если треугольникъ ABC — равносторонній.

200. Доказать, что если къ этому тѣлу въ точкахъ A , B и C приложены три силы, по направленію совпадающія съ тремя высотами \triangle -ка ABC , а по величинѣ равныя (или пропорціональныя) тремъ соответственнымъ основаниямъ его, то такое тѣло останется въ равновѣсіи.

201. Къ концамъ горизонтальнаго круглаго стержня AB , длиной $l = 10$ фут., приложены двѣ силы по $P = 30$ фунтовъ, сила, приложенная къ точкѣ B , направлена по длинѣ стержня, а сила, приложенная въ точкѣ A , направлена вертикально внизъ. Вѣсъ стержня $P = 10$ фунтовъ. Определить графически и аналитически 1) равнодѣйствующую силу по величинѣ и направленію, а также моментъ равнодѣйствующей пары, къ которымъ приводятся двѣ силы, дѣйствующія на стержень, если за центръ приведенія принять центръ тяжести стержня; 2) величину, направленіе и точку приложения силы, уравновѣшивающей данную систему силъ.

202. На концахъ невѣсимаго однороднаго стержня, длина котораго $l = 60$ см., дѣйствуютъ двѣ равныя силы по $P = 12$ кгр. Силы эти лежатъ въ параллельныхъ плоскостяхъ и, будучи перенесены параллельно самимъ себѣ въ одну точку, образуютъ между собою прямой уголъ. Определить 1) равнодѣйствующую силу и моментъ равнодѣйствующей пары, если за центръ приведенія принять середину стержня 2) при какихъ условіяхъ возможно сохранить равновѣсіе стержня

203. Кубъ стоитъ на горизонтальной плоскости. Черезъ одну изъ вершинъ его нижняго основанія O проведены три оси координатъ OX , OY и OZ совпадающія съ ребрами куба. Показать, что къ двумъ вершинамъ куба, примыкающимъ къ верхнему ребру его, параллельному оси OX , приложено по одной силѣ P такъ, что направленіе одной силы параллельно оси OY , а направленіе другой параллельно оси OZ т. е. силы эти направлены по со-

ответствующимъ роурамъ куба. Определить по величинѣ и по направлению равнодѣйствующую силу и моментъ равнодѣйствующихъ паръ, если за центръ приведения принять центръ тяжести куба.

204. Каконъ уравновѣшивающн грузъ надо подвѣсить къ концу A призматическаго рычага AB , свободно вращающагося около своего другого конца B , если вѣсъ рычага P , и вертикально вверхъ на него дѣйствуетъ сила $2.5 P$, приложенная отъ конца B на одной четверти длины рычага.

205 Балка лежитъ горизонтально на 2-хъ опорахъ. Къ ней приложены грузы $F_1 = 12$ пуд., $F_2 = 15$ п. и $F_3 = 16$ п. на соответствующихъ разстояніяхъ, считая отъ одного конца: $l_1 = 5$ ф., $l_2 = 10$ ф. и $l_3 = 15$ ф. Найти давленіе на каждую опору 1) не принимая во вниманіе вѣса самой балки; 2) считая, что вѣсъ балки $P = 4$ пуда.

206. Точка вращенія рычага ACB , согнутаго подъ прямымъ угломъ, находится въ C . Плечи AC и BC соответственно равны $a = 10$ и $b = 7$ см., при чемъ плечо AC вертикально. Горизонтальная сила $P = 2.1$ клр., приложенная къ точкѣ A , уравновѣшивается вертикальной силой, приложенной въ точкѣ B . Найти эту последнюю силу, а также давленіе, производимое на точку опоры.

207. Балка AB , длиною $l = 10$ фут и вѣсомъ $P = 24$ фунта, наклонена къ горизонту, при чемъ концомъ A она упирается въ основаніе стѣны, а другой конецъ ея B удерживается горизонтально натянутою веревкой, укрѣпленной въ стѣнѣ на высотѣ $h = 8$ фут. Определить натяженіе F веревки и давленіе N конца A .

208. Къ концу B балки AB , свободно вращающейся около своего другого конца A , шарнирно укрѣпленной въ стѣнѣ, подвѣсить грузъ Q , равный вѣсу самой балки. Балка удерживается въ равновѣсіи веревкой, перпендикулярной къ AB и привязанной къ ея срединѣ. Уголъ, составляемый балкой съ горизонтомъ, $= 30^\circ$. Найти натяженіе F веревки и давленіе N стѣны на конецъ A по величинѣ и направлению.

209. Брусочъ длина котораго $= l$, а вѣсъ $= P$, опирается концомъ A на горизонтальную плоскость, а концомъ B на стѣну, наклоненную вправо отъ вертикали и образующую съ горизонтомъ уголъ въ 60° . Найти, какую горизонтальную силу F надо

приложить къ точкѣ A , чтобы брусокъ остался въ равновѣсїи, а также сопротивленія R и R' въ опорныхъ точкахъ A и B . Уголъ наклона бруска къ горизонту — 30° .

210. Невѣсомый брусокъ AB , длина котораго $l = 10$ фут., опирается концомъ A на вертикальную, а концомъ B на горизонтальную плоскость. На разстояніи a отъ конца B къ нему подвѣсить грузъ $P = 4$ фунт. Брусокъ расположенъ въ плоскости, перпендикулярной къ прямой пересѣченія опорныхъ плоскостей и составляетъ съ горизонтомъ уголъ α . Определить горизонтальную силу S , которую необходимо приложить, чтобы удержать брусокъ въ равновѣсїи, а также сопротивленія R и R' опоръ въ точкахъ A и B .

$$\begin{array}{lll} \alpha = 30^\circ; & 45^\circ; & 60^\circ \\ \alpha = 3 \text{ ф.} & 5 \text{ ф.} & 8 \text{ ф.} \end{array}$$

211. Брусокъ AB , длина котораго $= l$, а вѣсъ $= P$, опирается, какъ въ предыдущей задачѣ, концами A и B на вертикальную и горизонтальную плоскости. Онъ удерживается отъ скольженія натяженіемъ веревки, привязанной однимъ концомъ къ бруску, а другимъ концомъ укрѣпленной въ ребрѣ опорныхъ плоскостей. Брусокъ и натянутая веревка расположены въ плоскости, перпендикулярной къ этому ребру, и составляютъ съ горизонтомъ углы α и β . Определить натяженіе P' веревки, а также сопротивленія R и R' опоръ въ точкахъ A и B .

$$\alpha = 45^\circ; \quad \beta = 15^\circ; \quad \alpha = 60^\circ; \quad \beta = 30^\circ.$$

212. Можетъ ли этотъ брусокъ удерживаться въ равновѣсїи натяженіемъ веревки, если она привязана къ его серединѣ?

213. Два неравные бруска AB и BC , вѣсомъ которыхъ можно пренебречь, соединены шарниромъ въ точкѣ B , а концами A и C заделаны въ горизонтальную плоскость. Бруска расположены въ вертикальной плоскости и составляютъ съ горизонтомъ углы α и β . Къ вершинѣ B привѣсить грузъ $P = 10$ пул. Определить горизонтальные распоры S и S_1 и вертикальныя давленія Q и Q_1 , производимыя каждымъ брускомъ.

$$\begin{array}{lll} \alpha = 30^\circ; & 45^\circ; & 60^\circ; \quad 90^\circ \\ \beta = 60^\circ; & 45^\circ; & 60^\circ; \quad 30^\circ. \end{array}$$

214. Определить моментъ устойчивости кирпичной стѣны трапециoidalнаго сѣченія (см. фиг. 100) при вращеніи ея около

ребра, проходящего через: а) точку D в точку A , если верхнее основание — b , нижнее основание — a , высота — h , длина стѣны — l . Удельный вѣсъ кирпича — δ .

Примеръ. $b = 0,6$ м., $R = 1,2$ м., $h = 1,5$ м., $l = 2$ м.; $\delta = 2$

215. Опредѣлить коэффициентъ устойчивости погонажного метра прямоугольной стѣны изъ кирпича, высота которой — h , а толщина — b , если на стѣну дѣйствуютъ давленіе вѣтра въ p тоннъ на кв. метръ.

Примеръ. $h = 2$ м.; $b = 0,5$ м.; $p = 0,2$; $\delta = 2$.

216. Опредѣлить, во сколько разъ увеличится коэффициентъ устойчивости этой стѣны, если сзади къ ней по всей длине пристроить стѣнку (контръ-форсъ), профильное сѣченіе которой представляетъ прямоугольный треугольникъ, съ высотой (прилегающей къ главной стѣнѣ) — $\frac{h}{2}$ и основанием — b .

217. Опредѣлить коэффициентъ устойчивости кирпичной дымоходной трубы, представляющей усѣченный конусъ, высота котораго — h , радіусы нижняго и верхняго основаній равны R и r , а дымоходъ представляетъ цилиндръ, радіуса — ρ . Трубу стремится опрокинуть давленіе вѣтра въ p тоннъ на кв. метръ площади, представляющей проекцію наружной поверхности трубы на плоскость, перпендикулярную направленію вѣтра. Вслѣдствіе скольженія воздушнаго потока по поверхности трубы, давленіе вѣтра слѣдуетъ уменьшить, умноживъ его на эмпирическій коэффициентъ — $0,57$.

Отвѣты и рѣшенія.

1. 162 километра 2. 1998 м. 3. $v_1, v_2 = 15:14$. 4. 1,5 ф.
 5. 1,5 м. 6. $\frac{v_1 v_2 t}{v_1 + v_2} = 54$ ф. 7. 3 ч 45 м. 8. $\frac{t_1 t_2}{v_2 - v_1} = 45$ ч;
 $\frac{v_1 v_2 t}{v_2 - v_1} = 315$ в. 9. $\frac{v_1(t_1 + t_2)}{t_2} = 3,75$ м.; 900 м. 10. 0,04 ф.
 11. 40 м. 12. 60 м. 13. 64 ф. 14. 0,1 м. 15. 20 сек. 16. 200 м.
 17. 150 ф.; 48 ф. 18. $a = 20$ м.; $r = 200$ м. 19. 40 сек.
 20. 195 м. 21. $r = 8$ м. $s = 120$ м. 22. $a = \frac{5}{16}$ м.; $s = 750$ м.;
 $r = 25$ м. 23. 120 м. 24. $94 \frac{1}{2}$ см. 25. 12,5 в. 26. 100 см.
 27. $-\frac{1}{9}$ м. 28. 30 ф. 29. $s = 576$ ф.; $s' = 176$ ф. 30. а) 49 м.,
 б) 53 м. 31. 62,5 м. 32. $t = 4 \frac{1}{4}$ сек.; $v = 136$ ф. 33. 400 ф.;
 176 ф. 34. 17,3 м. 35. $t = 2 \frac{1}{4}$ сек.; $r = 80$ ф. 36. $h = 2g$; $t = 2$.
 37. $t = 14 \frac{2}{7}$ сек.; $s = 135,1$ м. 38. $3 \frac{8}{21}$ фут. 39. $9 \frac{1}{2}$ сек.
 40. $s = 6960$ м.; $t = 34 \frac{2}{7}$ сек. 44. 1,5 g. 45. 196 ф.; 7 сек.
 46. 6250 м.; $61 \frac{2}{7}$ сек. 47. 120 м.; $85 \frac{2}{7}$ сек. 48. 200 ф.; 2,5 сек.
 49. $h = \frac{3v^2}{8g} = 18$ ф. 50. 4,5 сек. 51. $v_0 = 96$ ф.; $h = 144$ ф.
 52. 758,5 ф. 53. $a = \frac{v^2}{2t} = 72000$ м. 54. а) 256 ф. б) Назовемъ
 глубину колодца черезъ x . Время наблюденія, т. е. 4 секунды
 состоитъ изъ времени паденія камня $= \sqrt{\frac{2x}{g}} - \frac{1}{4}$ и времени
 распространения звука $= \frac{r}{1100}$. Поэтому $\frac{1}{4} + \frac{x}{1100} = 4$, откуда
 $x = 232$ ф. (приблиз.) 55. 32 ф. 56. $s = 5$ м.; $s = 50$ м;
 $= 7,5$ сек.; $a = 0,5$ м. 57. 5 сек.; 100 ф. 58. Черезъ 1 сек.

59. 39,2. 60 $r = \frac{2s - gt^2}{2gt} = 1,2$ сек. 62. Если бы тѣло не встрѣ-
глось съ пластинкой, то оно поднялось бы на высоту $h = \frac{v_0^2}{2g} =$
 $= \frac{225}{64}$ ф и время до полного подъема и обратнаго паденія
 $t = \frac{2v_0}{g} = \frac{30}{32} = 0,94$ сек. Скорость тѣла въ моментъ удара сто-
я пластинку опредѣлится по формулѣ

$$v_1 = 1/2 g(h - h_1) = \sqrt{64 \left(\frac{225}{64} - 2 \right)} = 9,54 \text{ ф.}$$

Время, въ которое тѣло долетитъ до пластинки, опредѣлится изъ
уравненія $v_1 = v_0 - gt_1$, откуда $t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} = \frac{15 - 9,54}{32} = 0,16$ сек.
По условію задачи тѣло будетъ обратно падать съ той же ско-
ростью v_1 , съ какою оно ударилося о пластинку, т. е. время па-
денія будетъ равно 0,16 сек., а полное время подъема и паденія
 $t_1 = 0,16 \cdot 2 = 0,32$. Искомое отношеніе $\frac{t_1}{t} = \frac{0,32}{0,94} = \frac{1}{3}$ (прибли-
зительно).

- 65 а) 35 ф; б) 5 ф; в) 25 ф. 66. 20 в. 67. $\frac{d}{v_1 + v_2} ; \frac{d}{v_1 - v_2}$.
68. 15 сек; 17 сек (прибл.) 69 а) 3 сек; б) 4,8 сек. 70. 28 ф.
71 1) 87,2 м; 3) 173,2 м 72 $V = 2v \cos \frac{\alpha}{2}$, 1) 42,5; 5) 30
73 63,3 м; $\alpha = 47^\circ 16'$. 74 $V = 125$ м $(V, v_1) = 39^\circ 19'$;
 $(V, v_2) = 77^\circ 3,5'$; $\angle (v_1, v_2) = 53^\circ 7'$ 75. $V = 10,2$; $(V, v_1) =$
 $= 58^\circ 41'$; $(V, v_2) = 40^\circ 7'$; $\angle (v_1, v_2) = 66^\circ 18'$.
77. 10; 31 — $30 \cos \alpha$ 78 7,85 м. 81 24. 82. 1,45 м. 83 18
87. $4\sqrt{2}$; $\frac{2r}{\pi} = 3$ м. 88. $\frac{2ln}{60} = 2$ м 89. $\frac{30r}{l} = 51$. 90 $\frac{l_1 v_1}{d_1}$
— 42. 91. 50 см 92. 800 ф 93 $s = 55$ ф; $r = \frac{1}{2} v_x^2 + v_y^2 = 59,5$ ф.
94. Якорь сперва будетъ подниматься равномерно замедленно
съ начальной скоростью v_0 азростата въ моментъ перерѣзанія ка-
ната. Поднявшись на высоту $h = \frac{v_0^2}{2g}$, якорь будетъ падать.
95. Тоже у конца поѣзда. Почему? 96 0 Почему? 97. $\frac{1}{2}$
98. $\frac{1}{16}$ 99. 30 км/ч. въ часъ; $\frac{1}{16}$. 100. $1\frac{1}{4}$. 101 10 клр

102. $a = 1_{125}$ ф.; $s = 14,4$ ф. 105 5,1 сек 106 21°_8 пуд.
107. 13,5 п. 109. 2 п. 110. 0,1. 111 2:7.

112. 25. 113. 20. 114 13. 115 53 116 89. 117 10;
 $\angle (P, R) = 60^{\circ}$. 118. $10\sqrt{2}$; $(P, R) = \angle (Q, R) = 45^{\circ}$.
121. $10\sqrt{3} = 17,3$. 122 $10\sqrt{2} = 14,1$

123. 10. 127 $4P \cos 36^{\circ} \cos 72^{\circ}$. 128 P . 139. НЕТЬ. Почему?
140. 10; $10\sqrt{2} = 14,1$. 141. 12; 9 142. 200; 173. 144 $3\sqrt{2}$
145. 240. 146. 20. 147. 5,5. 148. Горизонтальная тяга сжи-
мается силой $= 24$ кгр., а наклонная растягивается силой
 $= 24\sqrt{2} = 33,8$ кгр. 150. 13. 152 $2AB$. 153 $3AD$ 154. 4 м
155 0. 157. 12 и 6 кгр. 158. $\frac{PL}{2} + P\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{L}\right) = 13,2$ кгр.
 $\frac{PL}{2} + P\left(\frac{1}{2} + \frac{d}{L}\right) = 10,8$ кгр. 159 32 и 64 кгр

160. $\frac{a(P+Q)}{Q} = 40$ см. 161 20 кгр.; на 21 см от точки А.

162 6 кгр. 163. На $\frac{1}{8}$ длины бруска, считая от точки при-
крепления груза в 20 кгр. 164. $R = 2$ кгр.; $CO = 3l$.
165 В 5 децим. от точки А. 166. 2 кгр. 167. Равно-
действующая $R = 4$ кгр. приложена в серединѣ медианы сто-
роны, противоположной 3-ей вершинѣ. 168 Точка приложения
равнодействующей веѣхъ силъ дѣлитъ пополамъ расстояние между
точками приложения равнодействующей 1-ой и 4-ой силъ и равно-
действующей 2-ой и 3-ей силъ. 170. Равнодействующая равна
по величинѣ другой диагонали и приложена в точкѣ пересѣченія
диагоналей. 171. $G = -65$ кгр.-смтр; 13 кгр. 172. $2P \cos \alpha$; 0
173. $G = 17$ кгр.-см 174. $G = 29$ кгр.-см. 175. 53 кгр.-см
176 1) 72,2 кгр.-см.; 2) 88,6 кгр.-см. 3) 125 кгр.-см.

177. $\frac{ab \sin C}{a+b+c}$ 178. На разстояніи отъ нѣкой стороны —
 $\frac{h}{3} \left(1 + \frac{2}{n+1} \right) = \frac{2}{9} h$. 179. $\frac{h_1 + h_2}{3}$, $\frac{h_1 - h_2}{3}$. 182. На

$\frac{1}{6}$ части радіуса. 183 На разстояніи — $\frac{a}{4}$ отъ центра б-ва.

185 $OG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ 187 Разстояніе центра тяжести отъ стороны.

перпендикулярно к обеим, равно $\frac{a^2+ab+b^2}{3(a+b)}$ 189. На

середина диагональ AC 190. Координаты центра тяжести $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$.

191. Совпадает с центром тяжести треугольника 192. Пусть D — середина AC , и G — центр тяжести $\triangle ABC$. Прямая, проведенная через D перпендикулярно к стороне AC

193. $OG = \frac{4a^2 + r_1^2 + r_2^2}{3\pi(a + r_1)}$ 194. В точке встречи осей

195. На 3,26 дюйма. 196. $OG = \frac{3(4R^3 + 6R^2r + 4Rr^2 + r^3)}{4R^2 + 3Rr + r^2}$

197. Пусть r_1 — расстояние искомого центра тяжести от нижнего, а r_2 — от верхнего основания усеченной пирамиды. Тогда $\frac{r_1}{r_2} =$

$$\frac{H^2 + 2Hh + 3h^2}{h^2 + 2Hh + 3H^2} \quad \text{Если высоты заменить основаниями } B \text{ и } b,$$

то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{B + 2\sqrt{Bb} + 3b}{b + 2\sqrt{Bb} + 3B}$ 198. См. теорему Жестовского относи-

тельно трех точек. 201. 1) $R = 50$ ф. направлена под углом $53^\circ 8'$ к стороне; $G = 150$ фунто-фут. 2) Сила в 50 ф., параллельная R и приложенная в точке M стороны, при чем $AM = 1\frac{1}{4}$ ф.

202. $R = P/2 = 16,9$ клгр., $G = \frac{P}{2} \sqrt{2} = 507,6$ клгр. см.

203. Равнод. сила $R = P/2$ и ось равнод. пары $G = \frac{Pa}{2}$ образуют с осями одинаковые углы в 90° , 45° и 15° , откуда следует, что совокупность их образует *одинакую или подобную систему*

204. $\frac{P}{8}$. 205. 18,75 н; 24,25 н. В подобных зада-

чах рекомендуется находить давления на опоры по уравнениям моментов сил относительно опор, считая кр-мф притягиваемых сил еще и противодействия R и R' опоры. Написав одно уравнение моментов для опоры A , а другое для опоры B , легко найдем R и R' . 206. 3 клгр. 207. Натяжение веревки = 9 фунт.

208. Так как все данные и все силы лежат в одной плоскости, то проведем в этой плоскости из точки A , как из начала, две взаимно-перпендикулярные оси, горизонтальную и вертикальную, и напишем два уравнения суммы проекций сил

на каждую из них, а также уравненіе моментовъ относительно точки А, при чемъ уголъ неизвѣстной силы X съ горизонтальною осью назовемъ черезъ α , а длину бруска черезъ l . Итакъ имѣемъ: $N \cos \alpha - P \cos 60^\circ = 0$. . . (1), $P \cos 30^\circ - N \sin \alpha - 2Q = 0$. . . (2); $Q / \cos 30^\circ + 1$, $Q / \cos 30^\circ - 1$, $Pl = 0$. . . (3). Изъ ур-ія (3)

получимъ, что $P = \frac{3\sqrt{3}}{2} Q$. Вставимъ это значеніе въ (1) и (2),

найдемъ: $N \sin \alpha = \frac{Q}{4}$, $N \cos \alpha = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{4} Q$. Возводя обѣ части

въ квадратъ и сложивъ, будемъ имѣть, что $N^2 = \frac{7Q^2}{4}$ или $N =$

$\frac{Q}{2} \sqrt{7}$. Подставимъ это значеніе въ ур-іе $N \sin \alpha = \frac{Q}{4}$, полу-

чимъ, что $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$, откуда $\alpha = 10^\circ 54'$ 209. Проведемъ изъ

точки А горизонтальную и вертикальную оси, напомнимъ три ур-ія равновѣсія (R и R' перпендикулярны къ опорнымъ плоскостямъ):

$$P - R' \cos 30^\circ = 0, \quad R' \sin 30^\circ + R - P = 0; \quad \frac{Pl}{2} \cos 30^\circ - R' / \sin 60^\circ = 0.$$

$$\text{Рѣшивъ уравненія, найдемъ, что } F = \frac{P}{4} \sqrt{3}; \quad R = \frac{3}{4} P; \quad R' = \frac{P}{2}.$$

$$210 \quad R = P \frac{a}{l} \cot \alpha; \quad R' = P \quad 211 \quad \text{Уравненія равновѣсія.}$$

$$R - F \cos \beta = 0 \quad . . . (1); \quad R' - P - F \sin \beta = 0 \quad . . . (2)$$

$$\frac{1}{2} P \cos \alpha + R \sin \alpha - R' \cos \alpha = 0 \quad . . . (3)$$

Изъ (1) находимъ $R = \frac{F}{\cos \beta}$. Подставимъ это значеніе въ (2):

$R' = P + R \tan \beta$. Подставимъ значеніе R' въ (3), получимъ послѣ

упрощеній, что $R = \frac{P \cos \alpha}{2(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta)} = \frac{P \cos \alpha \cos \beta}{2 \sin(\alpha - \beta)}$. Затѣмъ

легко находимъ, что $F = \frac{P \cos \alpha}{2 \sin(\alpha - \beta)}$ и $R' = P \left(1 + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha - \beta)} \right)$.

212. Нѣтъ. Почему? 213. Задача разрѣшается разложеніемъ силъ

по правилу параллелограмма, $S = S_1 = P \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

$$Q = P \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad Q_1 = P \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$214 \text{ Площа } Dd = \frac{a^2 + b^2 - b^2}{4(a+b)} \text{ м., площадь стержня } P = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$P \cdot Dd = \frac{hhd(a^2 + ab + b^2)}{6} = 2,52 \text{ тон метр}$$

$$P \cdot AJ = \frac{hhd(2a^2 + 2ab + b^2)}{6} = 3,96 \text{ тон метр}$$

$$215 \text{ Коэффициент устойчивости } \frac{b^2 \delta}{ph} = 1,25$$

$$216 \text{ Коэффициент устойчивости } \frac{10b^2 \delta}{3ph} ; \text{ или } 3^{\text{й}} \text{ раз.}$$

$$217 \text{ Вязь трубы } (R^2 + r^2 + Rr - 3r^2) \pi h \delta R, \text{ сила давления}$$

$$\text{ветра } P = 0,57 ph(R + r) \text{ Расстояние центра тяжести от киль-}$$

$$\text{ного основания } \frac{(2r + R)h}{3(R + r)} \text{ Опрокидывающий момент}$$

$$0,19 h^2 p (R + 2r) \text{ Коэффициент устойчивости}$$

$$\frac{(R^2 + r^2 + Rr - 3r^2) \pi h \delta R}{0,57 h p (R + 2r)}$$

Опечатки.

Страница.	Строка	Напечатано	(также было)
37	5 снизу	4,9 метр	4,9 м метр
81	9 "	0-й	0
82	2 "	сила n	сила n
85	5 сверху	настроением	настроением
86	1 "	$AI = a_1, Q$ и	$AI = a_1$ и
97	3 "	$\frac{P+Q}{Q} + \frac{p+q}{p}$	$\frac{P+Q}{Q} = \frac{p+q}{q}$
101	12 "	F_1	F_1
102	1 "	силы пара	силы пара
112	9 "	$\frac{RP_1 r}{P} = P_1 H$	$\frac{RP_1 r}{P} = P_1 H$
"	11 "	$\frac{RP_1 r}{P}$	$\frac{RP_1 r}{P_1}$

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	Стр.
Введеніе.	1

Кинематика.

Основныя понятія.	6
Равномерное прямолинейное движеніе.	9
Переменные движенія	10
Равномерно-переменные движенія	1
Уроченія движенія тѣла по данной траекторіи.	2
Опредѣленіе скорости и ускоренія переменныхъ движеній	3
Графическій способъ изображенія движеній	4
Сложеніе и разложеніе движеній	5
Криволинейныя движенія	5
Прямолинейное движеніе твердаго тѣла.	62

Введеніе въ статику и кинематику.

О силахъ и ихъ измѣреніи	6
Основныя законы механики.	7
Зависимость движеній отъ силъ.	8
Пропорціональности между силами, массами и ускореніями.	9

С т а т и к а.

Основная теорема статики	81
Сложеніе и разложеніе силъ	82
Пары силъ	101
О моментахъ силъ	114
О центрѣ тяжести	124
Принципы опредѣленія центровъ тяжести	129
Теоремы Гюльдена	143
Равновѣсіе свободнаго твердаго тѣла	145
Равновѣсіе несвободнаго твердаго тѣла	157
Задачи	164

